UNIVERSIDAD DE PANAMA
VICE-RECTORIA DE INVESTIGACION Y POST-GRADO
PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRIA EN MATEMATICA

HISTORIA Y ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

POR

CESAR AUGUSTO GARCIA E

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACION EN MATEMATICA EDUCATIVA

PANAMA, REPUBLICA DE PANAMA
1998

APROBADO POR:

Jorge Hernandez

Dr. JORGE E. HERNANDEZ

Josué Ortiz Gutiérrez

Dr. JOSUE ORTIZ

Omar O. Oliveros

PROF. OMAR O.OLIVEROS M.Sc.

Dr. Jaime Gutiérrez

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA
DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

FECHA: 13-2-98

DEDICATORIA

Esta tesis la dedico

*A mis padres, **Gregorio y Delfina**, de quienes he recibido, además del ser, el cariño, la comprensión y el respaldo para alcanzar las metas que me he propuesto en la vida*

*A mi hijo, **César Augusto**, fuerza impulsora y transmisora de energía para continuar por el camino de la lucha y la superación*

*A mi esposa, **Lidia**, como tributo a su capacidad de sacrificio, comprensión y confianza, quien en todo momento me alentó y motivó para seguir adelante*

César Augusto

AGRADECIMIENTO

Doy gracias a Dios, Nuestro Creador por iluminarme y darme fuerzas para alcanzar con éxitos una etapa más en mi formacion académica

Mi testimonio de profundo y eterno agradecimiento a quien ha sabido ser el compañero, el amigo y el asesor de este trabajo de graduación ***Dr Jorge Hernández***

A todos mis solidarios compañeros de promoción con quienes compartí gratos momentos

A todas aquellas personas que de una u otra forma contribuyeron para la feliz culminación de este trabajo

César Augusto

TABLA DE CONTENIDO

HISTORIA Y ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA

RESUMEN/ABSTRACT

Resumen

Este trabajo esta dirigido a estudiar la estructura y evolución histórica del concepto de integral definida Estos elementos son relevantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje y contribuyen a darle significatividad lógica y psicológica al concepto en estudio Con frecuencia, esta parte inherente al fundamento epistemológico es descuidada por quienes tenemos la seria responsabilidad de enseñar

Inicialmente se presenta un estudio histórico de la integral definida, partiendo desde los indivisibles de Cavalieri hasta la definición moderna dada por Cauchy Se estudia además la integral de Cauchy-Riemann, la extensión de la integral de Riemann

Finalmente, hacemos un estudio de los obstáculos epistemológicos más comunes en el proceso enseñanza-aprendizaje de la integral definida, por medio de los cuales nos proponemos romper con la concepción errónea que se tiene cuando se piensa que la primitiva y la integral definida son conceptos equivalentes Existe, además, la creencia errada de que el concepto de integral solamente se puede realizar para funciones continuas

Abstract

This work is aimed to study the structure and historical evolution of the concept of definite integral These elements are relevant to the teaching and learning processes, and they contribute to the logical and psychological significance of the concept in research Frequently, this inherent part to the epistemological foundations is overlooked by the ones who have the serious responsability of teaching

Initially, a historical study of the definite integrals is presented, beginning from the indivisible of Cavalieri to the modern definition given by Cauchy Besides, the Cauchy-Riemann integral and the extension of the Riemann integral are studied

Finally, a study of the most common epistemological obstacles of the definite integrals is made Through this study we intend to break down the widespread misconception that primitive and the definite integral are equivalent concepts Furthermore there exists the misbelief that the concept of integral can only be carried out for continuous functions

INTRODUCCIÓN

La integral era considerada bastante diferente en el siglo XVIII que en la actualidad. No había ninguna definición independiente de ella, la existencia de una integral nunca fue puesta en cuestión, se determinaba, por supuesto, explícitamente en la mayoría de aplicaciones que se realizaban en este siglo, con lo cual la cuestión no se planteaba. La integración era considerada como la inversa de la diferenciación. Por lo tanto, la integral indefinida se consideraba más fundamental que la integral definida.

Es realmente difícil hablar del primer trabajo en que se note de manera inequívoca manifestaciones conscientes de una fundamentación de la integral definida. Esto es así, porque los cambios se van gestando en sus diferentes aspectos, en el trabajo de muchos matemáticos. Entre éstos podemos destacar a Cavalieri, con sus indivisibles, Fermat, Euler, Jean Bernoullis, Lagrange, Lacroix, Legendre, Newton, Barrow, Leibniz, Laplace, Poisson, Dirichlet, Fourier, Cauchy, Riemann, Lebesgue y otros.

Leibniz había definido la integral como una suma. Pero la mayoría de los matemáticos rechazaron esta definición, puesto que la misma involucra tanto infinitos como infinitesimales, los cuales, a lo mejor, son conceptos problemáticos. En cambio Euler, los Bernoullis, Lagrange y Laplace, prefirieron pensar en la integración como la inversa de la diferenciación, esto es, encontrando la antiderivada

Cauchy abandonó la definición de la integral definida como la antiderivada en favor de su definición como el límite de una suma Pero para Cauchy no fue suficiente decir que la integral definida es el límite de sumas El primero tenía que especificar las sumas precisamente y entonces tenía que demostrar la existencia del límite

Mucho se ha cuestionado acerca de qué llevó a Cauchy a su definición de integral definida Se señalan, por ejemplo, consideraciones de tipo pedagógicas, conocimiento de los trabajos realizados por Poisson, sobre un tratamiento de la integral como suma, con una discusión de la relación entre los valores de integrales complejas y sus sendas de integración, y la fecundidad matemática de Cauchy

Es innegable la influencia en Cauchy de Euler, Lacroix y Poisson, sin embargo la tareas más duras, tanto técnicas como conceptuales, fueron obras de Cauchy mismo Realmente, ir desde el tratamiento de la integral hasta Cauchy nos parece que fue el más duro de los pasos que Cauchy tomó en el cálculo riguroso

Este trabajo de graduación, el cual hemos titulado ***"HISTORIA Y ANÁLISIS DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA"***, lo hemos dividido, para su mejor estudio y comprensión, en tres capítulos

En el capítulo primero estudiamos la integral antes de Cauchy, destacando en él los aportes de Cavalieri, Fermat, Euler, Newton y Leibniz

El capítulo segundo está dedicado al trabajo de Cauchy Presentamos aquí la definición de integral definida de Cauchy Las posibles motivaciones que tuvo Cauchy para construir su nueva definición, la prueba de la existencia de la integral definida dada por Cauchy, el Teorema Fundamental del Cálculo y su demostración, tanto por Cauchy como por Lagrange, la contribución de Dirichlet al estudio de la integral, la integral de Riemann y la extensión de integral de Riemann

En el tercer capítulo estudiamos los obstáculos epistemológicos y de origen didáctico en el tratamiento de la integral definida, en un curso de cálculo integral La producción de teorías de conocimientos matemáticos y su carácter veritativo, cuestiones propias de la Epistemología de la Matemática, son en la práctica educativa excluidas por los profesores, inconscientemente en la mayoría de los casos, y causa de preocupación de los alumnos, los que no "adivinan" las formas casi "mágicas" de las teorías matemáticas, que les obliga a su aceptación sin discusión

El conocimiento del objeto matemático, que incluye naturaleza, estructura y procesos históricos, es una condición necesaria pero no suficiente El docente de matemática tiene que preocuparse acerca de cómo aprenden sus alumnos, es decir, el conocimiento matemático tiene que estar estrechamente complementado con las teorías del aprendizaje

Es nuestro gran deseo que este trabajo contribuya a promover la reflexión, tanto en estudiantes como docentes de matemáticas, sobre la necesidad de conocer la fundamentación histórica de los conceptos matemáticos en general y en particular de la integral definida, con el convencimiento de tener como premio un mejor desempeño en nuestra difícil misión de formar los futuros educadores matemáticos

CAPÍTULO I:

LA INTEGRAL ANTES DE CAUCHY

Antes y durante el siglo XVIII, la integral era considerada en forma bastante diferente a la actualidad No existía ninguna definición específica de ella

Recordemos que en la antiguedad, el método empleado por excelencia para la resolución de problemas, estaba fundamentado en la geometría Ejemplo de ello lo constituye los *"indivisibles de Cavalieri"*, método a traves del cual Cavalieri logró un resultado equivalente a $\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$, para $p \leq 9$

(p toma sólo valores enteros)

1.1. BONAVENTURA CAVALIERI

A diferencia de la escuela griega que descartó la posibilidad de calcular áreas y volumenes de figuras geométricas mediante la comparación entre secciones de la figura conocida y de la que se pretende calcular, **Bonaventura Cavalieri (1598-1647)**, nacido en Milán, sí calcula áreas y volumenes bajo ese esquema, lo que evidentemente muestra una actitud diferente respecto de los procesos infinitos a la que asumieran los griegos

Esta nueva actitud, motivada en parte por la necesidad de obtener resultados que pudieran ser utilizados en la incipiente industria, la navegación y la guerra, se puede observar en los científicos de finales de siglo XVI y la primera mitad del siglo XVII Otro factor que posibilitó tal cambio de actitud fue lo que ha dado por llamarse la ruptura galileana

Para realizar sus cálculos, Cavalieri, se vale del principio que hoy lleva su nombre y que establece

> "Si las secciones de dos sólidos en cada altura intermedia son iguales en área, entonces los cuerpos sólidos tienen el mismo volumen"

Así pues, el método como Cavalieri procede, consiste en comparar los indivisibles de una figura con los correspondientes indivisibles de otra, de las cuales una es conocida (en el sentido de saber cuál es su área o volumen, segun sea el caso)

Lo que nosotros, con la herramienta actual del cálculo, hariamos integrando funciones, Cavalieri lo hace sumando indivisibles

Veamos como Cavalieri, en su geometria de los indivisibles, encontró la forma equivalente a la expresión

$\int_0^a x^p dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$ para p = 2, y posteriormente encontró los equivalentes para p = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 Veremos -con auxilio de nuestra notación- cómo es que obtiene el resultado para p = 1, 2 y 3

Consideremos el paralelogramo AD que se exhibe en la figura 1 siguiente

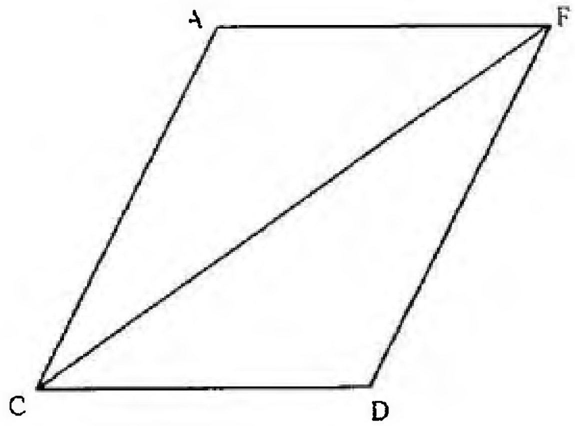


Figura 1

Para el caso p = 1, Cavalieri lo que prueba es que el área del paralelogramo AD es el doble que la de cualquiera de los triángulos ΔACF o ΔDFC Para ello, traza en la figura 1 los segmentos $\overline{NE}$ y $\overline{BG}$, de tal forma que, $\overline{NE} \| \overline{BG} \| \overline{AF}$, HE = BM, y NH = MG, como se muestra en la figura 2

Para efectos de mayor operatividad, llamaremos x a la longitud del segmento $\overline{HE}$, y a la del segmento $\overline{NH}$ y finalmente, a la del segmento $\overline{AF}$, llamémosle a Esto es NH = y, HE = x, AF = a, así que x + y = a

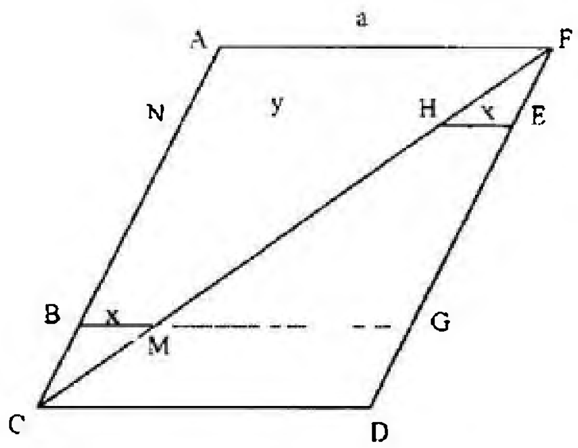


Figura 2

Como dijimos al inicio, Cavalieri dice sumando todas las líneas paralelas (esto lo escribiremos como Σ), se tiene Σx + Σy = Σa, y puesto que HE = BM, por ser ΔBMC ≅ ΔHEF, bajo la misma correspondencia, entonces Σx = Σy, que al sustituirla en la relación anterior, tenemos 2Σx = Σa, y finalmente se tiene $\sum x = \frac{1}{2}\sum a$ En este caso, Σx es el área del triángulo ΔFCD y Σa es el área del paralelogramo AD

Para establecer un símil con nuestra integral, introducimos el factor Δx (léase, incremento en x) en la ultima expresion, y tendremos:

$$\Sigma x\,\Delta x = \frac{1}{2}\Sigma a\,\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}a\Sigma\,\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}a\,a = \frac{1}{2}a^2$$

Así que

$$\Sigma x\Delta x = \frac{1}{2}a^2$$

es lo equivalente a la notación

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$

De manera semejante, Cavalieri obtiene la relación correspondiente para p = 2, esto es como

$$x + y = a$$

entonces

$$(x + y)^2 = a^2$$

y sumando todas las líneas, se tiene

$$\Sigma(x + y)^2 = \Sigma a^2$$

o bien

$$\Sigma x^2 + 2\Sigma xy + \Sigma y^2 = \Sigma a^2$$

y puesto que

$$\Sigma x^2 = \Sigma y^2,$$

entonces

$$2\Sigma x^2 + 2\Sigma xy = \Sigma a^2$$

Por otra parte, para encontrar la expresión Σxy, Cavalieri procede como sigue, considera

$$x = \frac{1}{2} a + z, \; y = \frac{1}{2} a - z, \text{ entonces}$$

$$\Sigma xy = \Sigma(\frac{1}{2}a + z)(\frac{1}{2}a - z) = \Sigma(\frac{1}{4}a^2 - z^2) = \frac{1}{4}\Sigma a^2 - \Sigma z^2$$

y puesto que $\Sigma z = \frac{1}{4}\Sigma x$ (ver figura 2) entonces $\Sigma z^2 = \frac{1}{4}\Sigma x^2$

luego entonces la igualdad

$$2\Sigma x^2 + 2\Sigma xy = \Sigma a^2$$

se transforma en

$$2\Sigma x^2 + 2(\frac{1}{4}\Sigma a^2 - \frac{1}{4}\Sigma x^2) = \Sigma a^2$$

de la cual se obtiene que

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}\Sigma a^2$$

De nuevo, si multiplicamos a "cada término" de la sumatoria por Δx, tendremos

$$\Sigma x^2\,\Delta x = \frac{1}{3}\Sigma a^2\,\Delta x$$

$$= \frac{1}{3} a^2 \Sigma \Delta x$$

$$= \frac{1}{3} a^2 a = \frac{1}{3} a^3$$

esto es

$$\Sigma x^2 \Delta x = \frac{a^3}{3}$$

que es lo correspondiente en nuestra notación a la integral siguiente

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

Para el caso en que p = 3, recurrimos a su ***Excercitaciones geometrical sex*** (Bolonia, 1647), en la cual, en la Parte IV, Proposición 21, se establece

> "Todos los cubos del paralelogramo AD (Fig 1) son el cuádruplo de todos los cubos de cualquiera de los triángulos ΔACF ó ΔFDC"

Lo que este enunciado establece es que,

$$\Sigma a^3 = 4\Sigma x^3 = 4\Sigma y^3$$

así que probaremos la primera de las igualdades anteriores

Puesto que

$$\frac{(x+y)^3}{(x+y)x^2} = \frac{(x+y)^2}{x^2}$$

entonces sumando para todas las líneas se tiene

$$\frac{\Sigma(x+y)^3}{\Sigma(x+y)x^2} = \frac{\Sigma(x+y)^2}{\Sigma x^2}$$

Por otra parte, como

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3}\,\Sigma a^2 \text{ y } \Sigma(x+y)^2 = \Sigma a^2$$

entonces

$$\frac{\Sigma(x+y)^3}{\Sigma(x+y)x^2} = \frac{3}{1}\ ,$$

y de ahí obtenemos

$$\Sigma(x+y)^3 = 3\Sigma(x+y)x^2$$

Luego, como

$$\Sigma(x+y)^3 = \Sigma(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

$$=\Sigma x^3 + 3\Sigma x^2 y + 3\Sigma xy^2 + \Sigma y^3$$

y

$$3\Sigma(x + y)^3 = 3\Sigma x^3 + 3\Sigma yx^2$$

se tiene la igualdad

$$3\Sigma x^3 + 3\Sigma yx^2 = \Sigma x^3 +3\Sigma x^2 y +3\Sigma xy^2 + \Sigma y^3$$

y puesto que

$$\Sigma x^3 = \Sigma y^3,$$

se tiene

$$3\Sigma x^3 = 2\Sigma x^3 + 3\Sigma xy^2$$

de lo cual obtenemos

$$\Sigma x^3 = 3\Sigma xy^2 \ (= 3\Sigma x^2 y)$$

Finalmente

$$\Sigma a^3 = \Sigma(x + y)^3$$

$$= \Sigma x^3 + 3\Sigma x^2 y + 3\Sigma xy^2 + \Sigma y^3$$

$$= 4\Sigma x^3 = 4\Sigma y^3$$

que es lo que se pretendía demostrar

Si multiplicamos por Δx "cada término" de la suma se obtiene

$$\Sigma x^3 \, \Delta x = \frac{1}{4} \, \Sigma a^3 \, \Delta x$$

$$= \frac{1}{4} \, a^3 \, \Sigma \Delta x$$

$$= \frac{1}{4} \, a^4$$

que es equivalente a la expresión

$$\int_0^a x^3 dx = \frac{a^4}{4}$$

De manera similar se puede obtener

$$\Sigma x^p = \frac{1}{p+1}\,\Sigma a^p, \text{ con p entero positivo,}$$

que sería el equivalente a la integral

$$\int_0^a x^p dx = \frac{1}{p+1}\,a^{p+1} \text{ para } p \neq -1$$

Como sabemos, para calcular la integral anterior se requiere del cálculo del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \qquad + n^p}{n^{p+1}}$$

situación que Cavalieri sólo pudo calcular (obviamente sin el lenguaje de límites) hasta el caso en que p = 9, por ende no encontró el resultado general mencionado anteriormente

El método de integración llamado de Cavalieri muestra principalmente que $\int_0^a x^p\,dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$ para todas las potencias enteras positivas Sin embargo, después de la publicación de este resultado en 1635, no proporcionó ninguna demostración completa más que para n = 4

1 2. PIERRE FERMAT

En 1635, Pierre Fermat (1601-1665), demostró rigurosamente este resultado general y, en la misma epoca, consiguió extenderlo a las potencias fraccionarias positivas por medio de parábolas de la forma $y^m a^n = b^m x^n$ Se interesó por la cuadratura de la hipérbola fraccionaria, aplicando una técnica equivalente a la que se utiliza para el calculo de la integral definida división del área bajo la curva en pequeños elementos, estimacion de la suma de los elementos del área mediante rectangulos y de la ecuación analítica de la curva, procedimiento utilizado por Fermat, para expresar el equivalente de lo que se obtiene sirviéndose del límite de la suma Segun Boyer, Fermat llegó a reconocer todos los aspectos de la integral, salvo el de la integral misma

La mayor parte de los métodos de integración que se utilizaban antes de la época de Newton y Leibniz hacían uso de una subdivisión equidistante de los intervalos y comparaban el área o el volumen que se trataba de calcular con otro conocido, como hemos visto con Cavalieri Fermat, sin embargo, tenía un método que le permitía hacer el cálculo de un área en términos absolutos, utilizando una subdivisión que implicaba que las areas de los rectángulos infinitesimales que había que sumar estaban en progresión geométrica de razón menor que la unidad

A continuación presentaremos el método que utilizó Fermat para calcular $\int_0^a x^p\,dx$, evitando el cálculo de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}$$

El método de Fermat para extender el resultado siguiente

$$\int_0^a x^p\,dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$$

para valores racionales de p(p $\neq$ -1), consiste en considerar a la curva $y = x^p$, ($p = \frac{m}{n}$, m y n distintos de 0) en el intervalo

[0,a]

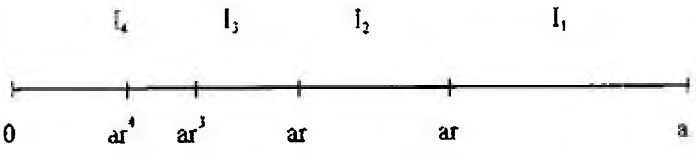
Divide el intervalo [0,a] en los puntos $x_1 = a$, $x_2 = ar$, $x_3 = ar^2$, $x_4 = ar^3$, etc , tomando al numero r de tal forma que $0 < r < 1$, por lo que se cumple la desigualdad

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_4 >$$

y de ahí que el intervalo [0,a] quede dividido en los subintervalos

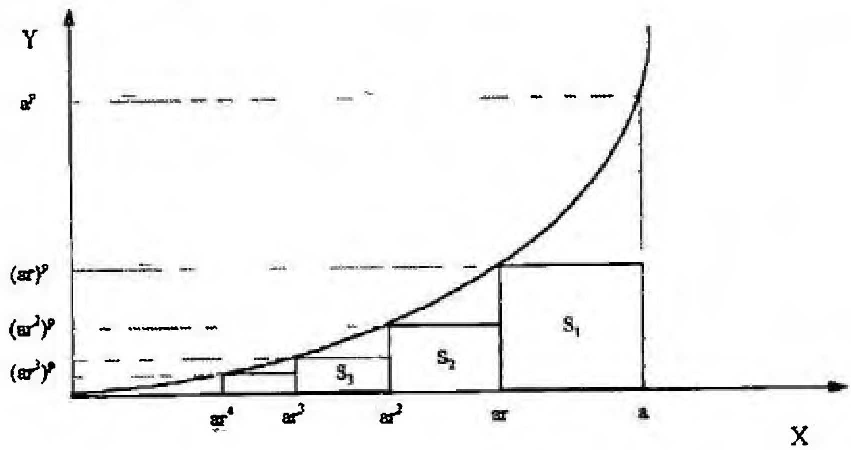
$I_1 = [ar,a]$, $I_2 = [ar^2,ar]$, $I_3 = [ar^3,ar^2]$, $I_4 = [ar^4,ar^3]$, etc ,

como se muestra en la siguiente figura



Puesto que $y = x^p$, entonces las alturas sobre la curva de los puntos $x_1 = a$ $x_2 = ar$, $x_3 = ar^2$, etc , son, respectivamente $y_1 = a^p$, $y_2 = (ar)^p$, $y_3 = (ar^2)^p$, etc

Consideremos los rectángulos que se muestran en la siguiente figura y sumemos sus áreas



De la figura se sigue que las áreas de los rectángulos son

$$S_1 = (a - ar)(ar)^p = a^{p+1}\ (1 - r)r^p$$

$$S_2 = (ar - ar^2)(ar^2)^p = a^{p+1}\, r(1 - r)r^{2p}$$

$$S_3 = (ar^2 - ar^3)(ar^3)^p = a^{p+1}\, r^2(1 - r)r^{3p}$$

Así que la suma S es:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \quad$$

$$= a^{p+1}(1 - r)r^p + a^{p+1}(1 - r)r\; r^{2p} + a^{p+1}(1 - r)r^2r^{3p} +$$

$$= a^{p+1}(1 - r)r^p\ (1 + r^{p+1} + (r^{p+1})^2 + (r^{p+1})^3 + \qquad)$$

$$= a^{p+1}(1 - r)r^p \quad \frac{1}{1 - r^{p+1}}$$

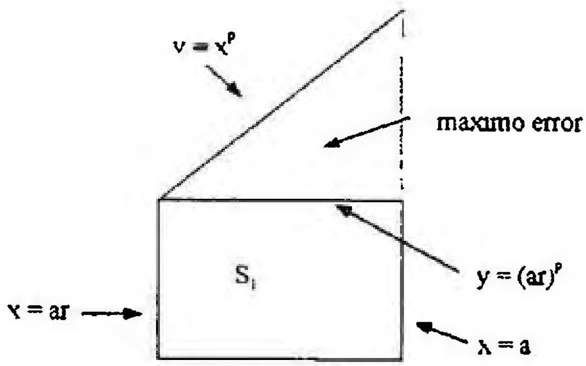
Pero como

$$1 + r + r^2 + r^3 + \qquad + r^p = \frac{1 - r^{p+1}}{1 - r}$$

entonces

$$S = a^{p+1}\ \frac{r^p}{1 + r + r^2 \qquad + r^p}$$

Ahora bien es claro de la figura anterior que el máximo error al considerar el area bajo la curva $y = x^p$ como el área S, es precisamente el área que queda comprendida entre la curva $y = x^p$, la recta $y = (ar)^p$ y las dos rectas $x = a$ y $x = ar$, como se muestra en la siguiente figura



Así que cuando $r \to 1$, el máximo error tiende a cero Luego el area bajo la curva, es

$$\int_0^a x^p dx = \lim_{r \to 1} S = \lim_{r \to 1} a^{p+1} \frac{r^p}{1 + r + r^2 + \dots + r^p}$$

Por lo que concluimos que si $p \neq -1$, se tiene

$$\int_0^a x^p \, dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$$

Con este resultado se obtenía implícitamente el valor del límite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$$

pues la integral

$$\int_0^a x^p dx = a^{p+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \quad + n^p}{n^{p+1}}$$

y como Fermat obtuvo por otros medios que

$$\int_0^a x^p \, dx = a^{p+1} \frac{1}{p+1}$$

Se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \quad + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

Es realmente muy difícil hablar del "primer" trabajo en el que se note de manera inequívoca manifestaciones conscientes de una nueva fundamentación Esto es así porque los cambios se van gestando en sus diferentes aspectos, en el trabajo de muchos matemáticos y así el proceso de "mutación conceptual" va penetrando gradualmente en el conocimiento colectivo Hay, sin embargo, algunos científicos en cuyo trabajo quedan plasmadas las nuevas ideas o conceptos, de forma más clara y contundente

El uso del concepto de integral en el siglo XVIII fue bastante restringido Newton había utilizado la derivada y la antiderivada, o integral indefinida, mientras Leibniz puso el énfasis en los diferenciales y su suma Jean Bernoulli, presumiblemente siguiendo a Leibniz trató la integral como inversa de la diferencial, de modo que si dy = f'(x)dx, entonces y = f(x)

Euler dijo que el cálculo se ocupaba de hallar la propia función, sólo utilizó la idea de suma para la evaluación aproximada de integrales En realidad, todos los matemáticos del siglo XVIII trataron la integral como inversa de la derivada o de la diferencial dy La existencia de una integral nunca fue puesta en cuestión, se determinaba, por supuesto, explícitamente en la mayoría de las explicaciones que se realizaban en este siglo, con lo que la cuestión no se planteaba

1.3. ISAAC NEWTON

Newton es el primero en concebir la idea de reemplazar todas las operaciones, de carácter geométrico, del Análisis infinitesimal contemporáneo, por unica operación analítica, la diferenciación, y por la resolución del problema inverso, operación que, desde luego, el método de las series de potencias le permitía realizar con toda facilidad Basando su lenguaje, en la ficción de un parámetro "temporal" universal, llama "fluyentes" a las cantidades variables en función de este parámetro, y "fluxiones" a sus derivadas Newton no parece haber dado una importancia especial a las notaciones e incluso más tarde sus seguidores se vanaglorian de la carencia de una notación sistemática, sin embargo, él mismo toma desde el principio, para su uso personal, la costumbre de designar la fluxión por un punto, es decir, $\frac{dx}{dt}$ por $\dot{x}$, $\frac{d^2x}{d^2t}$ por $\ddot{X}$, etc

En lo que se refiere a la integración, parece como si Newton, al igual que Barrow, no la hubiese considerado nunca más que como un problema (hallar la fluyente conociendo la fluxión, es decir, resolver $\dot{X} = f(t)$, y no como una operación, tampoco emplea ningun nombre para la integral ni, a lo que parece, ninguna notación habitual, excepto algunas veces un cuadrado $\boxed{f(t)}$ o $\square\, f(t)$ para

$\int f(t)\,dt$

1.4. GOTTFRIED LEIBNIZ

Contrario a Newton, Leibniz se interesa en construir un algoritmo basado en el manejo formal de ciertas reglas simples En octubre de 1675, Leibniz decidió escribir el símbolo $\int$ para representar la sumatoria, es una S alargada para indicar "suma"

Mientras no salgamos del siglo XVII, hay que dejar bien señalado que sólo se abre paso al análisis moderno cuando Newton y Leibniz, volviendo la espalda al pasado, aceptan buscar provisionalmente la justificación de los nuevos métodos, no demostraciones rigurosas, sino en la fecundidad y la coherencia de los resultados Como había indicado muchas veces Leibniz con toda claridad, se trataba de hacer con el nuevo análisis los mismo que había hecho Viête, con la teoría de las ecuaciones, y Descartes con la geometría

1.5. LEONHARD EULER

Los predecesores de Leonhard Euler (1707-1783), en la mayoría de los casos, elaboran el cálculo diferencial e integral en relación estrecha con la geometría, el método antiguo En cambio, él transforma el cálculo en una teoría formal de funciones que no requiere concepciones geométricas

En la obra de Euler, el concepto de función desempeña un papel preponderante y explícito A partir de esta obra, el reconocimiento de las funciones en lugar de las curvas como objeto de estudio, permitió la gradual aritmetización del análisis y su consecuente separación de la geometría

En la obra en tres volumenes *"Textos sobre el Cálculo Integral"* (1768-1770), Euler nos presenta una discusion casi completa de la integración de funciones en términos de las funciones algebraicas y las trascendentes elementales, discute también varias integrales definidas no elementales (incluidas las que ahora llamamos funciones beta y gama), y da una gran cantidad de métodos para resolver las ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales

El problema principal que quedó sin resolver a lo largo de todo el siglo XVIII fue el de la fundamentación del cálculo Se dieron muchos pronunciamientos de inconformidad con relación a la falta de rigor lógico en la teoría del cálculo infinetesimal, por ejemplo, las conocidas críticas a los fundamentos del cálculo hechos por George Berkeley

Fueron críticas, como éstas y no dificultades encontradas en el desarrollo o en la aplicación de las nuevas técnicas, las que motivaron la fundamentación del análisis

El programa de reconstrucción del análisis matemático se dio durante las primeras décadas del siglo XIX, con Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

En lo que a la integración se refiere, la obra de Cauchy representa una vuelta a las sanas tradiciones de la antigüedad y la primera parte del siglo XVII, pero basada en medios técnicos todavía insuficientes La integral definida, que se había mantenido largo tiempo en segundo plano, vuelve a ser de nuevo la noción primordial, para la que Cauchy hace adoptar la notación $\int_a^b f(x)dx$ propuesta por Fourier, en lugar de la

incómoda $\int f(x)\,dx \begin{bmatrix} x = b \\ x = a \end{bmatrix}$

empleada por Euler, y para definirla vuelve al método "exhaustivo", o como diríamos hoy a las "sumas de Riemman"

Durante todo el siglo XVIII, la integración fue tratada como una operación inversa de la diferenciación La definición de Cauchy de la derivada de una función está formulada de tal manera que la continuidad de la función resulta ser una condición necesaria para la diferenciación de la función Es probable que Cauchy, al desarrollar una exposición rigurosa del cálculo integral sobre la base de una concepción de la integral como límite de una cierta suma, tuviera buenas razones para adoptar esta concepción que va en contra de los trabajos de sus predecesores del siglo XVIII

Cauchy consideraba, por otra parte que esta manera de proceder tenía la ventaja de proporcionar siempre valores reales para la integrales correspondientes a funciones reales y que era muy apropiada para todos los casos, incluso para aquellos en los que no se pueda pasar generalmente de la función bajo el signo $\int$ a la función primitiva

CAPITULO II:

LA INTEGRAL DE CAUCHY

Agustín Louis Cauchy es el principal responsable de haber introducido la concepción moderna de continuidad, como también proveer una definición de la integral definida como límite de una suma

En su *Cours d'analyse [1821]*, Cauchy dió a conocer la nueva concepción de continuidad

> Una funcion f(x), unicamente definida y limitada por x entre a y b (a < b), es continua entre estos límites, si para tal x "el valor numérico de la diferencia f(x + a) - f(x) decrece indefinidamente con ese valor de a"

Es interesante y probablemente conveniente observar que aunque la continuidad es una propiedad de una función en un punto, Cauchy hace fundamental la noción de continuidad sobre un intervalo Por otro lado, la discontinuidad es presentada como una propiedad que se verifica en un punto en particular

> f(x) es discontinua en x_0, si f no es continua en x_0

Esta diferencia en el enfoque refleja la concepción de Cauchy de una función discontinüa

Durante la primera mitad del siglo XIX un numero de trabajos incluyendo uno de Cauchy fueron dedicados al estudio de funciones discontinuas

Al iqual que Leibniz, Cauchy, definió la integral definida como el límite de una suma Pero Cauchy necesitó precisar su definición No fue suficiente decir que la integral definida es el límite de una suma Él primero tenia que especificar las sumas y luego probar que el límite existía

2.1. DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA

A continuación presentaremos el procedimiento seguido por Cauchy para dar su definición de integral definida

Cauchy tomó una función $f(x)$ continua en un intervalo cerrado $[x_0\ X]$ Dividió el intervalo $[x_0\ X]$ en n partes, no necesariamente iguales

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_2,\ \quad ,\ x_n - x_{n-1}$$

Multiplicó cada uno de estos "elementos" por el valor de f en el punto extremo de la izquierda, formando la suma

$$(1)\quad S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_3 - x_2)f(x_2) + \\ + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Cauchy notó que el valor de la suma S depende tanto de n como del modo de division del intervalo $[x_0, X]$. La cuestión crucial es si el modo particular de división no importa si el tamaño de los sub-intervalos se hace muy pequeño y n muy grande. Asumiendo la continuidad uniforme de f(x) -aunque Cauchy no distinguió entre continuidad y continuidad uniforme- Cauchy fue capaz de probar que el modo de división no importa, así que S tiene un límite unico, el cual él definió entonces como la **INTEGRAL DEFINIDA**.

Con el fin de probar que el valor de la integral es independiente del modo de dividir el intervalo $[x_0, X]$, Cauchy empezó escogiendo el caso más simple: cuando hay solamente el intervalo $[x_0, X]$ mismo. Construyendo una partición de este intervalo, Cauchy demostró que para algun θ entre 0 y 1, $0 \leq \theta \leq 1$

(2) $$S = (X - x_0)\, f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

Regresando nuevamente a (1), Cauchy aplicó la misma técnica que produjo (2) para cada uno de los subintervalos

$$X_1 - x_0,\ X_2 - x_1,\ X_3 - x_2,\ \ldots,\ X - x_{n-1},$$

obtenidos subdividiendo el intervalo original. Él obtuvo entonces que

(3) $$S = (X_1 - x_0)\, f[x_0 + \theta_0(X_1 - x_0)] + (X_2 - x_1)\, f[X_1 + \theta_1(X_2 - x_1)] + \ldots + (X - x_{n-1})\, f[X_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]$$

Él ahora definió $f[X_k + \theta_k(X_{k+1} - x_k)] = f(X_k \pm \epsilon_k)$, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$ Teniendo entonces

$$(4) \quad S = (X_1 - x_0)[f(x_0) \pm \epsilon_0] + (X_2 - x_1)[f(x_1) \pm \epsilon_1] + \cdots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \epsilon_{n-1}]$$

Cauchy entonces probo que si los subintervalos de longitud $x_k - x_{k-1}$ son tomados suficientemente pequeños, entonces el ϵ_k se aproxima a cero, así que tomando una sub-partición de la partición original no cambiará apreciablemente el valor dado de S por (1)

Cauchy entonces observó que cualquiera de dos modos dados de división cuyas partes son muy pequeñas, un tercer modo puede ser siempre construido que subdivida cada uno de los dos dados El valor de S para esta nueva subdivisión es arbitrariamente cercana al valor de S para *cualquiera de las dos* primeras subdivisiones, y así, Cauchy concluyó, como los valores numéricos de los elementos $x_k - x_{k-1}$ se hacen más pequeños y n se hace más grande los diferentes valores de S para los dos modos dados de división difieren sólo imperceptiblemente uno del otro Entonces, "si permitimos a los valores numéricos de estos elementos decrecer mientras sus numeros se incrementan, el valor de S se torna ultimamente, para los propósitos prácticos [*sensiblemente*] constante O, en otras palabras, alcanza un cierto límite "

Aquí Cauchy asumió implícitamente la misma propiedad de los numeros reales que él asumió en establecer el criterio Cauchy para series Si los varios valores de alguna expresión (como S, en este ejemplo, o la suma parcial n de una serie) se hace más cercano *uno de otro*, entonces la expresión tiene un cierto límite En este caso, Cauchy observó que, el límite del valor S depende unicamente de f(x) y el final de los puntos x_0 y X del intervalo, y "este límite es lo que él llamó ***integral definida***"

Recordemos que antes y durante el siglo XVIII los matemáticos trataron la integral como la inversa de la derivada y su existencia nunca fue objeto de discusión Tendríamos que preguntarnos entonces, qué motivó a Cauchy abandonar la definición de la integral definida como la inversa de la derivada y crear su definición como el límite de sumas? Hoy día sabemos que la definición dada por Cauchy es completamente necesaria en un cálculo riguroso, pues no hay garantía que toda función tiene una antiderivada

Henri Lebesgue ha sugerido que las <u>consideraciones pedagógicas</u> impulsaron a Cauchy Lebesgue basó esta consideración en la relación cercana entre la definición de Cauchy y el recurso pedagógico comun de aproximar un área curvilínea con rectángulos El trabajo de Cauchy sobre la integral definida fue presentado por él en un curso de conferencias, y el conferenciar ha obligado a muchos matemáticos a examinar las bases cuidadosamente El mismo Cauchy comentó que "uno es naturalmente llevado por la teoría de las cuadraturas" a considerar la integral como una suma

A P Iushkevich ha dicho que la definición de integral definida de Cauchy fue escogida por él para reunir "las necesidades de investigación" Los matemáticos conocían muchos casos en los que la integral, definida como el área bajo la curva, tiene sentido, aun cuando el área en cuestión (y por lo tanto el valor de la integral) no es simplemente la antiderivada evaluada al final de los puntos del intervalo de integración

Joseph Fourier había exhibido un numero de funciones seccionalmente continuas, cuyas gráficas incuestionablemente encierran áreas Su trabajo hizo claro que la integral definida de una función representable por series trigonométricas puede existir, aun cuando la función que representa la integral no es en todas partes diferenciable Legendre había tratado con ejemplos en los que la integral definida son tomados como intervalos que contienen puntos en los que las funciones son discontinuas o se convierten infinitas Cauchy mismo se había interesado en estos problemas en su memoria de 1814 sobre la integración Claramente, alguna modificación de la definición aceptada de la integral definida era necesaria

No obstante, esta circunstancia en sí misma no explica por qué Cauchy buscó esta definición Después de todo, la integral de una función seccionalmente continua puede ser definida simplemente como la suma de las integrales sobre las piezas separadas, entonces la integral sobre cada pieza continua puede ser definida como la diferencia entre las antiderivadas evaluadas al final de los puntos de los intervalos de continuidad y Cauchy tenía este manejo

Cauchy, tanto en su ensayo de 1814 como posteriormente, evaluó integrales complejas en términos de integrales reales y logicamente que para ello necesitó una teoría satisfactoria de lo ultimo para tratar rigurosamente lo anterior Ya en 1820 en un ensayo presentado por Poisson, se observaba que el valor de una integral como $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$, puede ser diferente por diferentes

sendas de integración, si una senda incluye el infinito como un valor de la función Poisson sugirió entonces evaluar tales integrales como sumas

La yuxtaposición de Poisson de un tratamiento de la integral como una suma con una discusión de la relación entre los valores de integrales complejas y sus sendas de integración pudieran bien haber influenciado el pensamiento de Cauchy

Pareciera que la fecundidad matemáticas fue el factor decisivo en el deseo de Cauchy para una nueva definición Pienso que la razón principal que él escogió para definir la integral como límites de sumas fue su necesidad de asegurarse que el objeto que él estaba definiendo existía

Recordemos que para Cauchy no fue suficiente establecer su definición de integral definida, sino que además probo la existencia de la integral que él había definido

2.2. PRUEBA DE LA EXISTENCIA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

A continuación presentaremos la prueba de la existencia de la integral definida, dada por Cauchy

Supongamos que la función g = f(x) es continua con respecto a la variable x, entre los dos límites $x = x_0$, $x = X$ Designemos por x_1, x_2, , x_{n-1}, nuevos valores de x, localizados entre esos límites y supongamos que ellos son siempre crecientes o siempre decrecientes entre el primer límite y el segundo Podemos usar estos valores para dividir la diferencia $X - x_0$ en elementos

(1) $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, , $X - x_{n-1}$,

los cuales tienen el mismo signo. Una vez que se haya hecho esto. multiplicamos cada elemento por el valor de f(x) correspondiente al extremo izquierdo (origen) de ese elemento: esto es, el elemento $X_1 - x_0$ será multiplicado por $f(x_0)$; el elemento $X_2 - x_1$ por $f(x_1)$; ... y finalmente el elemento $X - x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$; y sea

$$(2) \quad S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

la suma de los productos obtenidos. La cantidad S dependerá claramente de:

1º. El número n de elementos en el cual hemos dividido la diferencia $X - x_0$;

2º. El valor de estos elementos y por lo tanto del modo de división adoptado.

Es importante observar que si el valor numérico de estos elementos se vuelve muy pequeño y el número n muy grande; el modo de división sólo tendrá un efecto insignificante en el valor de S. Esto en efecto puede ser probado como sigue:

Si supusiéramos que todos los elementos de la diferencia se redujeran a **uno** solo la cual sería justamente esa diferencia, esto implicaría que

(3) $$S = (X - x_0)f(x_0)$$

Cuando en lugar de esto tomamos la expresión (1) para los elementos de la diferencia $X - x_0$ el valor de S, determinado en ésta por la ecuación (2), será igual a la suma de los elementos multiplicados por una media de los coeficientes [Cauchy definió una media de un conjunto de elementos $\{a_1, a_2, \quad, a_n\}$, la cual él designó por $M(a_1, \quad, a_n)$ como una cantidad incluida entre el mínimo y el máximo de los elementos de ese conjunto]
Más aun, como estos coeficientes [los $f(x_k)$] son valores particulares de la expresión $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$ para valores de θ, $0 \leq \theta \leq 1$, podemos probar que la media en cuestión es otro valor de la misma expresión, correspondiendo a un valor θ entre los mismos límites Por lo tanto, podemos sustituir lo siguiente por la ecuación (2)

(4) $$S = (X - x_0)\ f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

donde θ, será un número menor que uno (pero no negativo) Para ir del modo de división que acabamos de considerar a otro en el cual el valor numérico de los elementos de $X - x_0$ son aun más pequeños, es suficiente dividir cada una de las expresiones (1) (esto es $x_k - x_{k-1}$) en nuevos elementos Entonces debemos reemplazar en el lado derecho de la ecuación (2) el producto $(x_1 - x_0)f(x_0)$ por una suma de productos similares para tal suma debemos sustituir una expresión de la forma $(x_1 - x_0)\ f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)]$, donde θ_0 es un numero no negativo menor que uno Note que vamos a tener una relación entre esta suma y el producto $(x_1 - x_0)f(x_0)$, la cual es similar a la relación que existe entre los valores S dados por las ecuaciones (4) y (3) Similarmente, debemos sustituir el producto $(x_2 - x_1)f(x_1)$ por una suma de términos que pueden ser escritas en la forma $(x_2 - x_1)\ f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)]$ donde θ_1 designa un numero no negativo menor que uno

Continuando de esta manera, finalmente concluimos que en el nuevo modo de división el valor de S será de la forma

$$(5) \qquad S = (x_1 - x_0)\ f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)\ f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \quad + (X - x_{n-1})\ f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]$$

Si en la ecuación (5) hacemos

$$f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \epsilon_0,$$

$$f[x_1 + \theta_1(X_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \epsilon_1,$$

$$f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \epsilon_{n-1},$$

entonces obtenemos

$$(6) \qquad S = (X_1 - x_0)\,[f(x_0) \pm \epsilon_0] + (X_2 - x_1)\,[f(x_1) \pm \epsilon_1] + \quad + (X - x_{n-1})\,[f(x_{n-1}) \pm \epsilon_{n-1}]$$

Resolviendo el producto, obtenemos

$$(7) \qquad S = (X_1 - x_0)\,f(x_0) + (X_2 - x_1)\,f(x_1) + \quad + (X - x_{n-1})\,f(x_{n-1}) \pm \epsilon_0\,(X_1 - x_0) \pm \epsilon_1\,(X_2 - x_1) \pm \quad \pm \epsilon_{n-1}\,(X - x_{n-1})$$

Podemos agregar que si los elementos

$$X_1 - x_0,\ X_2 - x_1,\quad ,\ X - x_{n-1},$$

tienen valores muy pequeños, cada una de las cantidades $\pm \epsilon_0$, $\pm \epsilon_1$, $\pm \epsilon_2$, , ϵ_{n-1}, serán muy cercanas a cero y, por lo tanto, lo mismo será verdad para la suma

$$\pm \epsilon_0\,(X_1 - x_0) \pm (X_2 - x_1) \pm \quad \pm \epsilon_{n-1}\,(X - x_{n-1}),$$

lo cual es equivalente al producto de $X - x_0$ por una media entre estas cantidades Garantizando esto cuando comparamos las ecuaciones (2) y (7) vemos que no cambiamos perceptiblemente el valor de S cuando lo calculamos por un modo de división en el cual los elementos de la diferencia $X - x_0$ tienen un valor numérico muy pequeño si vamos a un segundo modo de división en el cual esos elementos son derivados de otros

Ahora, supongamos que consideramos dos modos distintos de división de la diferencia $X - x_0$, en los cuales los elementos de la diferencia tienen un valor numérico muy pequeño Nosotros podemos comparar estos dos modos de división con un tercer modo tal que cada elemento, ya sea del primero o del segundo modo, es formado uniendo varios elementos del tercer modo Para satisfacer esta condición, es suficiente que para cada uno de los valores de x puesto entre el límite x_0 y X en los primeros dos modos, sean usados en el tercero y podemos probar que el valor de S cambia muy poco yendo del primero o segundo modo al tercero Por lo tanto, cuando los elementos de la diferencia $X - x_0$ se vuelven infinitamente pequeños el modo de división tiene solamente un imperceptible efecto en el valor de S y si dejamos que el valor numérico de esos elementos decrezca mientras que su número crece, el valor de S finalmente viene a ser, para todo propósito práctico, constante, o en otras palabras, éste finalmente alcanza un cierto límite que depende unicamente de la función f(x) y de los valores extremos x_0, X, de la variable x Este límite es lo que he llamado **INTEGRAL DEFINIDA**

2.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

Una vez que Cauchy definió la integral y estableció su existencia, fue capaz de probar teoremas acerca de ésta En particular, él fue capaz de obtener lo que hoy en día es llamado el Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f(x)$ es finita y continua a través del intervalo $[x_0,X]$ y $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$, entonces $F'(x) = f(x)$

Aun desde Newton y Leibniz, el Teorema Fundamental del Cálculo ha sido el resultado clave del cálculo Para Cauchy y sus sucesores éste relaciona sus nuevas definiciones rigurosas de derivada e integral por medio de un teorema conectando el cálculo diferencial con el cálculo integral Aunque el mismo Cauchy no lo llamó Teorema Fundamental del Cálculo, el lugar que éste ocupa en el cálculo justifica ampliamente esta designación

Cauchy probó el Teorema Fundamental del Cálculo combinando dos cosas (a) el teorema del valor medio para integrales, ya conocido por Lagrange, y (b) la aditividad de la integral, definida sobre intervalos, un hecho ampliamente conocido y, para Cauchy, una consecuencia sencilla de la definición de suma de la integral El paso clave es

$$F(x + a) - F(x) = \int_{x_0}^{x+a} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{x}^{x+a} f(x)dx = af(x + \theta a)$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ El teorema ahora se deduce de la definición de derivada de Cauchy

Los recursos de la demostración de Cauchy son dobles

a La demostración de Lagrange de lo que significa el Teorema Fundamental del Cálculo, en la cual hay una consideración cuidadosa de expresiones como $F(x + a) - F(x)$

b Proposiciones del teorema del valor medio para integrales de Lagrange y Lacroix

Uno tal vez se preguntaría como podría Lagrange probar el Teorema Fundamental del Cálculo Él no tenía una definición de integral definida, para él la integral indefinida era justamente la antiderivada Aun así, él probó una versión del teorema Lagrange probó que $f(x) = F'(x)$ para una función $F(x)$ definida como el área bajo la curva $y = f(x)$ hasta algun x En efecto la demostración de Lagrange del Teorema Fundamental del Cálculo es técnicamente muy similar a la de Cauchy, aunque las bases lógicas de las definiciones son completamente diferentes

El área bajo la curva $y = f(x)$, desde x hasta $x + i$ es dada, dijo Lagrange, por $F(x + i) - F(x)$ donde F representa la función de área Supongamos que la función f es creciente en el intervalo $[x, x + i]$, en este caso la situación geométrica facilita ver que el área bajo la porción de la curva entre x y $x + i$, se encuentra entre $if(x)$ y $if(x + i)$ Esto es,

$$if(x) \leq F(x + i) - F(x) \leq if(x + i)$$

por supuesto el resultado es obvio Pero Lagrange continuó la serie de Taylor con residuo implica que

$$f(x + i) = f(x) + if'(x + \theta)$$

$$F(x + i) = F(x) + iF'(x) + \left(\frac{i^2}{2}\right) F''(x + \theta)$$

Observe que los dos θ son diferentes en f y F, por lo tanto obtenemos

$$if(x) \le iF'(x) + \left(\frac{i^2}{2}\right) F''(x + \theta) \le if(x) + i^2 f'(x + \theta)$$

Por consiguiente

$$(*)\ 0 \le i[F'(x) - f(x)] + \left(\frac{i^2}{2}\right) [F''(x + \theta)] \le i^2 f'(x + \theta)$$

para todo i, tan pequeño como se quiera Por lo tanto dijo Lagrange, F'(x) - f(x) debe ser cero Si no, él señaló que

$$** \qquad |i| < \frac{|F'(x) - f(x)|}{|[f'(x + \theta) - \frac{1}{2}F''(x + \theta)]|}$$

hace (*) falso Por consiguiente se deduce que

$F'(x) = f(x)$

Las series de Taylor en la demostración de Lagrange tienen el mismo rol lógico que el teorema del valor medio para derivadas en la demostración de Cauchy Lagrange realizó su demostración del teorema con un tratamiento sofisticado de las desigualdades relevantes Esta semejanza están suficientemente cerca a sugerir influencias en Cauchy, posiblemente directa, posiblemente a través del trabajo de Poisson. Pero la demostración de Cauchy tiene limitaciones derivadas de su contexto, y no de su lógica interna. Lagrange asumió, al igual que Poisson, que la función F tiene segunda derivada; esto es, él explícitamente usó la hipótesis que f tiene, tanto derivada como antiderivada. Más aun, él no definió ni área ni integral, y su demostración requiere que la función sea monótona. Por tanto, él no tenía la esencia de la demostración de Cauchy del Teorema Fundamental del Cálculo.

Para adaptar la demostración de Lagrange para sus propios propósitos, Cauchy tuvo que definir y probar la existencia de F. Él lo hizo. Más aun, tuvo que encontrar y probar un resultado equivalente al resultado siguiente:

$$i f(x) \leq F(x + i) - F(x) \leq i f(x + i)$$

pero no limitado a las funciones monótonas. Él hizo esto usando el teorema del valor medio para integrales definidas. El teorema del valor medio para integrales fue derivado, tanto por Lagrange como por Lacroix. Cada uno lo derivó a partir del lema de Lagrange, que dice que una función con derivada positiva en un intervalo, es creciente en ese intervalo. Pero cada uno de ellos definió la integral como la inversa de la derivada y, por lo tanto, consideran este teorema como una variante del teorema del valor medio para derivadas Debido a que Cauchy visualizó la integral como una suma y no como una antiderivada él necesitó una nueva demostración del teorema del valor medio para integrales

El teorema del valor medio para integrales fue establecido por Cauchy, como sigue

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = (x - x_0)\, f[x_0 + \theta(x - x_0)],\ 0 \leq \theta \leq 1$$

El derivó este teorema a partir de uno de los pasos en su demostración que el modo de división no afecta el valor de la integral definida Una vez más Cauchy ha tomado un resultado ya conocido, le ha dado una base lógica diferente y lo ha usado para un propósito totalmente diferente Basado en una demostración aceptable del teorema del valor medio la demostración de Cauchy del Teorema Fundamental del Cálculo puede usarse hoy en día

2 3 1 DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO, DADA POR A CAUCHY

Si en la integral definida $\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$ dejamos que uno de los límites de integración por ejemplo X, varíe, la integral misma variará con esa cantidad Y si el límite X ahora variable, es reemplazado por x, obtenemos como resultado una función de x, la cual es llamada una integral tomada desde el origen $X = x_0$ Sea

(1) $$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

la nueva función A partir de

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = (x - x_0)\, f[x_0 + \theta(x - x_0)]$$

derivamos que

(2) $$F(x) = (x - x_0)\, f[x_0 + \theta(x - x_0)],\ F(x_0) = 0$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$

También a partir de

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{\epsilon} f(x)\, dx + \int_{\epsilon}^{x} f(x)\, dx, \text{ donde } x_0 \leq \epsilon \leq X,$$

se obtiene

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)\,dx = \alpha f(x + \Theta\alpha),$$

o sea,

$$(3) \qquad F(x + \alpha) - F(x) = \alpha f(x + \Theta\alpha)$$

De las ecuaciones (2) y (3) se deduce que la función $f(x)$ es finita y continua en la vecindad de algun valor particular de la variable x La nueva función $F(x)$ será no solamente finita, sino también continua en la vecindad de ese punto, puesto que a un incremento infinitamente pequeño de x le corresponde un incremento infinitamente pequeño de $F(x)$ Por lo tanto, si la función $f(x)$ permanece finita y continua desde $x = x_0$ hasta $x = X$, lo mismo le ocurre a la función $F(x)$ Más aun, si los dos miembros de la fórmula (3) son divididos por α, concluimos, pasando por el límite, que

$$F'(x) = f(x)$$

Por lo tanto, la integral (1), considerada como una función de x, tiene como su derivada la función $f(x)$ bajo el signo de integración $\int$

2.4. CONTRIBUCIÓN DE DIRICHLET

Para Cauchy la condición de continuidad estaba implícita en la definición de lo que para él era una función Pero como sabemos, matemáticos como Fourier, Lagrange y el mismo Cauchy, se habían interesado en estudiar la integral de una función discontinua en un conjunto finito de puntos o funciones seccionalmente continuas

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), fue el primer matemático en llamar la atención de la existencia de funciones que son discontinuas sobre un conjunto infinito de puntos en un intervalo finito y se planteó el problema de extender el concepto de la integral a funciones de esta naturaleza Con este planteamiento, Dirichlet deja sin responder la siguiente pregunta ***¿En qué caso es una función integrable?***

A raíz de la pregunta formulada por Dirichlet, Bernhard Riemann (1826-1866), inicia su propia investigación que, como sabemos lo llevó a resolver en parte el problema planteado Fue Lebesgue quien finalmente pudo dar respuesta a la pregunta dejada por Dirichlet

2.5. INTEGRAL DE RIEMANN

En sus investigaciones acerca de la pregunta dejada sin responder por Dirichlet, Riemann buscó disminuir completamente el requerimiento de Cauchy de continuidad para el integrando Para hacer esto, él definió la integral definida como sigue

Vamos a tomar entre a y b una secuencia de valores x_1, x_2, , x_{n-1}, ordenados en extensión de a a b, y designemos $x_1 - a = \delta_1$, $x_2 - x_1 = \delta_2$, , $b - x_{n-1} = \delta_n$, además, dejemos a ϵ_i ser numeros positivos más pequeños que la unidad Es claro que el valor de la suma $S = \delta_1 f(a + \epsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \epsilon_2\delta_2) + \quad + \delta_n f(x_{n-1} + \epsilon_n\delta_n)$, dependerá de la escogencia del intervalo δ y las fracciones de ϵ Si por cualquier cosa δ y ϵ pueden ser escogidos, tienen la propiedad de aproximarse indefinidamente a un limite fijo A cuando $\delta \to 0$, este limite es llamado el valor de la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Comparando la definición de Riemann con la dada por Cauchy, uno observa que no sólo Riemann no hace referencia a la continuidad del integrando, sino que al formar la suma S él multiplicó cada sub-intervalo δ_i por el valor de la función, no al comienzo del intervalo, sino en un punto arbitrario dentro del intervalo Riemann entonces, extendió su definición de la integral definida a aquellos casos en los que el integrando se hacía infinito en un punto x = c en el intervalo [a,b] En concordancia con la definición del valor general de Cauchy para tales casos, Riemann escribió *"Si la expresión*

$$\int_{a}^{c-a_1} f(x)dx + \int_{c+a_2}^{b} f(x)\,dx$$

se aproxima a un límite fijo cuando a_1 *y* a_2 *se hacen infinitamente pequeños, entonces este es el límite el cual uno designa por* $\int_a^b f(x)\,dx$*"*

La definición de Riemann marcó el comienzo de la teoría de las funciones discontinuas con la que él fue capaz de construir una función integrable, la cual se hace discontinua un numero infinito de veces en cualquier intervalo de cualquier modo pequeño

Antes de poder estudiar las extensiones de la integral de Riemann, es necesario revisar algunos conceptos preliminares concernientes a la integral de Riemann

DEFINICION Nº 1

Una partición P de [a,b] es un sub-conjunto finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de [a, b], tal que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

En otras palabras una participación de [a b] es un conjunto finito y ordenado P de puntos de [a,b] tal que a b ∈ P La familia de todas las particiones de [a b] la denotaremos P[a,b]

DEFINICIÓN Nº 2

La suma inferior de f correspondiente a la participación P es denotado por L(P,f) y definida por

$$L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

donde

$$m_i = \inf \{f(x) \;\; x \in I_i = [x_{i-1}, x_i]\}$$

De igual manera, la suma superior de f correspondiente a la partición P es denotada por U(P,f) y definida por

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

donde

$$M_i = \text{Sup } \{f(x) \quad x \in I_i = [x_{i-1} \; x_i]\}$$

DEFINICION Nº 3

Sea f $[a \; b] \to \mathbb{R}$ una función acotada La integral inferior de f en I es denotada por

$$\int_a^b f \, dx$$

y definida por

$$\int_a^b f \, dx = \text{Sup} \left\{ L(P,f) \quad P \in \mathbf{P}[a \; b] \right\}$$

De igual manera, la integral superior de f es denotada por

$$\int_a^{\bar{b}} f \, dx$$

y definida por

$$\int_a^{\bar{b}} f\ dx = \operatorname{Inf}\left\{ U(P,f) \quad P \in \mathbf{P}[a,b] \right\}$$

DEFINICIÓN Nº 4

Sea f $[a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada

f es Riemann integrable en $[a,b]$ si

$$\int_a^{b} f\ dx = \int_a^{\bar{b}} f\ dx$$

En este caso la integral de Riemann de f en $[a\ b]$ se define como el valor común

$$\int_a^{b} f\ dx = \int_a^{\bar{b}} f\ dx$$

y por lo general este numero es denotado por

$$\int_a^b f \text{ ó } \int_a^b f\,dx \text{ ó } \int_a^b f(x)\,dx$$

2.6 TEOREMA Nº 1. (CRITERIO DE INTEGRABILIDAD DE RIEMANN)

Sea $f\ [a\ b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a\ b]$ Entonces f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe una partición P de $[a\ b]$ tal que

$$0 \le U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

Demostración

Supongamos que para cada $\epsilon > 0$, existe una partición P de $[a\ b]$, tal que

$$0 \le U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

Para cada partición de P de $[a\ b]$ tenemos que

$$L(P,f) \le \int_a^b f\,dx \le \int_a^{\overline{b}} f\,dx \le U(P,f)$$

Por lo tanto,

$$0 \leq \int_a^{\bar{b}} f\, dx - \int_{\underline{a}}^{b} f\, dx \leq U(P,f) - L(P\ f)$$

Sea $\epsilon > 0$ Luego, existe una partición P de [a,b] tal que

$$0 \leq \int_a^{\bar{b}} f\, dx - \int_{\underline{a}}^{b} f\, dx \leq U(P\ f) - L(P\ f) < \epsilon$$

Así pues

$$0 \leq \int_a^{\bar{b}} f\, dx - \int_{\underline{a}}^{b} f\, dx < \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$ por consiguiente

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\, dx = \int_a^{\bar{b}} f\, dx$$

y f es integrable

Inversamente, supongamos que f es integrable en [a,b] luego

$$\int_a^{\bar{b}} f\, dx = \int_{\underline{a}}^{b} f\, dx = \int_a^{b} f\, dx$$

Sea $\epsilon > 0$ Por las definiciones de supremo e ínfimo, tenemos que existen particiones P_1, P_2 de $[a,b]$, tales que

$$L(P_1,f) > \int_{\underline{a}}^{b} f\ dx - \frac{\epsilon}{2}$$

y

$$U(P_2,f) < \int_a^{\bar{b}} f\ dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$ Como P es un refinamiento de P_1 y P_2, puesto que $P_1 \subset P$ y $P_2 \subset P$, tenemos que

$$L(P,f) \geq L(P_1,f) > \int_{\underline{a}}^{\bar{b}} f\ dx - \frac{\epsilon}{2}$$

$$U(P,f) \leq U(P_2,f) < \int_a^{\bar{b}} f\ dx + \frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) < \int_a^{\bar{b}} f\ dx - \int_{\underline{a}}^{b} f\ dx + \epsilon = \epsilon$$

o sea,

$$0 \leq U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$$

El conjunto de las funciones integrables segun Riemann en el [a,b] lo denotaremos por $\mathbf{R}([a,b])$

2.7. EXTENSIONES DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

Tenemos ya todo el material requerido, concerniente a la integral de Riemann Así podemos encontrar justificación para la usual expresión

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2(\sqrt{2} - 1)$$

En efecto $f : [1,2] \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en [1,2]

Sea $F(x) = 2\sqrt{x}$, entonces $F'(x) = f(x)$, para todo x de [1,2] Así por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{X}}\, dx = F(2) - F(1) = 2(\sqrt{2} - \sqrt{1})$$

Sin embargo no podemos encontrar justificación para la expresión también usual

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{X}}\, dx = 2 \ (\sqrt{1} - \sqrt{0}) = 2 \ (*)$$

puesto que la función f $(0,1] \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no es acotada en $(0,1]$, o sea que para cualquier valor dado a $f(0)$, una función f $[0,1] \to \mathbf{R}$, que satisfaga $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $0 < x \leq 1$, no está acotada y la definición de integral de Riemann no se aplica

Observamos que para todo y, $0 < y \leq 1$, la función antes definida pertenece a $R[y,1]$ y

$$\int_{y}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\ (1 - \sqrt{y})$$

Como $\sqrt{y} \to 0$ cuando $y \to 0^{+}$, se deduce que (*) valdría

$2(\sqrt{1} - \sqrt{0})$ si interpretamos el segundo término como

$$\lim_{y\to 0^{+}} \int_{y}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Entonces puede extenderse este procedimiento para tratar funciones que se comportan mal en un punto interior o en puntos exteriores de $[a,b]$

DEFINICION Nº 5

Una función $f\ [a,b] \to \mathbf{R}$ se llama integrable según Cauchy-Riemann sobre $[a,b]$ si

1 El conjunto $S_f = \{x \in [a,b]\ \ f$ no es continua en $x\}$ es finito

2 Existe una función continua $F\ \ [a,b] \to \mathbf{R}$ que es

diferenciable en cada punto del conjunto $(a,b) - S_\epsilon$ y que satisface $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b) - S_\epsilon$

Notación

Representaremos la familia de todas las funciones Cauchy-Riemann integrables en $[a,b]$ por CR $[a,b]$

TEOREMA Nº 2

Sea $f \in$ CR $[a,b]$ y denotaremos por $\mathbf{F}$ la familia de todas las funciones F $[a,b] \to \mathbf{R}$ que satisfacen la condición (2) de la definición anterior Entonces existe un numero real α tal que para todo $F \in \mathbf{F}$ $F(b) - F(a) = \alpha$

Demostración

Sean F, $G \in \mathbf{F}$, entonces $F-G$ es continua en $[a,b]$ y $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, para todo $x \in (a,b) - S_\epsilon$ Por consiguiente $F - G$ es constante en $[a,b]$ y por lo tanto existe $\alpha > 0$, tal que

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \alpha$$

Así pues para todo $F \in \mathbb{F}$, $F(b) - F(a) = \alpha$

DEFINICIÓN Nº 6

Sea $f \in CR\,[a,b]$ El número α dado por el teorema anterior es llamado la integral Cauchy-Riemann de f en [a b] y es denotado por

$$(CR)\int_a^b f\,dx$$

Volvamos a nuestro primer ejemplo Sea $f\ [0\ 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x \in (0\ 1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Aquí $S_e = \{0\}$ y si tomamos $F(x) = 2\sqrt{x}$ $x \in [0\ 1]$, entonces $F\ [0\ 1] \to \mathbb{R}$ es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1) - S_e = (0,1)$ con

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x),\ x \in (0\ 1)$$

Luego, $f \in CR\ [0,1]$ y

$$CR \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = F(1) - F(0) = 2$$

TEOREMA Nº 3

Sea, $f\ [a,b] \to \mathbf{R}$ $f \in CR\ ([a,b])$, si y sólo si existe algun subconjunto finito S de $[a,b]$ (no necesariamente S_f) y una funcion continua $F\ [a,b] \to \mathbf{R}$, tal que f es continua en $[a,b] - S$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b) - S$

Demostración

Condición necesaria ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in CR\ [a,b]$, entonces podemos tomar $S = S_f$ y el resultado se deduce de la definición de integrabilidad segun Cauchy-Riemann

Condición suficiente ($\Leftarrow$) Supongamos que existe un subconjunto finito S de $[a,b]$ y una función continua $F\ [a,b] \to \mathbf{R}$, tal que f es continua en

$[a,b] - S$, y, $F(x)$, para todo $x \in (a\ b) - S$

Como f es continua en $[a\ b] - S$ se tiene que

$[a\ b] - S \subset [a\ b] - S_\varepsilon$ y $S_\varepsilon \subset S$ por lo tanto $[a\ b] - S_\varepsilon$ sólo contiene un numero finito más de elementos que $[a,b] - S$ o sea,

$$[a,b] - S_\varepsilon = ([a,b] - S) \cup \{x_1, x_2, \quad , x_n\}$$

Supongamos primero, que $[a\ b] - S_\varepsilon = ([a,b] - S) \cup \{x_0\}$ o sea $S - S_\varepsilon = \{x_0\}$ y $S = S_\varepsilon \cup \{x_0\}$ Entonces existe $\delta > 0$ tal que f es continua en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ Más aun $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $x \neq x_0$ Como $f\ [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbf{R}$ es continua, la función

$$G\ [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbf{R}$$

definida por

$$G(x) = \int_{x_0-\delta}^{x} f\ dt$$

es continua en $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ y diferenciable en cada punto de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ Ahora bien, $G - F$ es diferenciable en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$, y

para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$, $(G - F)'(x) = 0$

Por lo tanto como G-F es continua $[x_0 - \delta \quad x_0 + \delta]$ existe una constante C tal que

$$(G - F)(x) = C \quad \text{para todo } x \in [x_0 - \delta \quad x_0 + \delta]$$

$$G(x) = F(x) + C, \text{ para todo } x \in [x_0 - \delta \quad x_0 + \delta]$$

La función F + C es diferenciable en $(x_0 - \delta \quad x_0 + \delta)$ (puesto que G es diferenciable en $(x_0 - \delta \quad x_0 + \delta)$)

Definamos ahora la función H_1 $[a\ b] \to \mathbf{R}$

$$H(x) = F(x) + C$$

Como $H(x) = G(x)$ para todo $x \in (x_0 - \delta \quad x_0 + \delta)$ se tiene que H es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $(a,b) - S_E$ y $H'(x) = F'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a,b) - S_F$

Por lo tanto $f \in CR[a,b]$

En el caso de que $S - S_E$ contenga más de un punto se procede por inducción en forma similar

Así pues, $f \in CR\ ([a,b])$

TEOREMA Nº 4

Si $f, g \in CR([a,b])$ y $\lambda \in \mathbf{R}$, entonces

$$f + g,\ \lambda f \in CR([a,b]),\ y$$

$$(CR)\int_a^b (f+g)\,dx = CR\int_a^b f dx + (CR)\int_a^b g dx$$

$$(CR)\int_a^b \lambda f dx = \lambda (CR)\int_a^b f dx$$

Demostración

Como $f, g \in CR([a,b])$, existen sub-conjuntos finitos S_1, S_2 de $[a,b]$ y funciones continuas $F\ [a,b] \to \mathbf{R}$, $G\ [a,b] \to \mathbf{R}$, tales que f es continua en $[a,b] - S_1$, g es continua en $[a,b] - S_2$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b) - S_1$, $G'(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,b) - S_2$

Sea $S = S_1 \cup S_2$, entonces f y g son continuas en $[a,b] - S$, y $S \subset [a,b]$ es finito Sea $H\ [a,b] \to \mathbf{R}$, definida por $H(x) = F(x) + G(x)$, entonces H es continua en [a b] y para todo $x \in (a\ b) - S$ se tiene que

$$H'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$$

Por lo tanto $f + g \in CR([a,b])$, y

$$(CR) \int_a^b (f + g)dx = H(b) - H(a) = (F(b) - G(b) + F(a) - G(a))$$

$$= (F(b) - F(a) + (G(b) - G(a))$$

o sea

$$(CR) \int_a^b (f + g)dx = (CR) \int_a^b fdx + (CR) \int_a^b gdx$$

Para la otra parte de la demostración Sea $H\ [a\ b] \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \lambda F(x)$ Entonces H es continua en [a,b] y para cada $x \in (a,b) - S$ se tiene que $H'(x) = \lambda F'(x)$ por lo tanto $\lambda f \in CR([a,b])$ además

$$(CR) \int_a^b \lambda fdx = H(b) - H(a) = \lambda F(b) - \lambda F(a)$$

$$= \lambda(F(b) - F(a))$$

$$= \lambda(CR) \int_a^b fdx$$

El siguiente teorema establece una conexión entre la

TEOREMA Nº 6 Sea f $[a\ b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $(a\ b]$ $f \in CR[a\ b]$, si y sólo si

$$\lim_{y \to a^+} \int_y^b f dx \text{ existe}$$

En tal caso

$$(CR) \int_a^b f dx = \lim_{y \to a^+} \int_y^b f dx$$

Demostración

Condición suficiente ($\Leftarrow$) Supongamos que

$$\lim_{y \to a^+} \int_y^b f dx$$

existe y denotémoslo por α.

Definamos la función F $[a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(y) = \begin{cases} -\int_y^b f dx & \text{si } a < y \leq b \\ -\alpha & \text{si } y = a \end{cases}$$

F es continua en cualquier punto $y \in (a\ b]$ y de la definición de α o sea $\alpha = \lim_{y \to a^+} F(y)$ se deduce que F es continua en $[a,b]$ Además, del Teorema Fundamental del Cálculo se obtiene que $F'(y) = -(-f(y)) = f(y)$ para todo $y \in (a\ b]$

Ahora bien, como $S_f = \{a\}$ y $(a,b) - S_f = (a,b)$, se tiene que $f \in CR([a\ b])$ y

$$(CR) \int_a^b f dx = F(b) - F(a) = -(-\alpha) = \alpha$$

Condición necesaria $(\Rightarrow)$ Supongamos que $f \in CR\ [a\ b]$ Como antes, $S_f = \{a\}$ y existe una función continua $G\ [a\ b] \to \mathbb{R}$ que es diferenciable en todo punto de (a,b) con $G'(y) = f(y)$, para todo $y \in (a,b)$, y

$$(CR) \int_a^b f dx = G(b) - G(a)$$

Para cada $y \in (a\ b]$ sea

$$F(y) = \int_{y}^{b} f dx$$

Entonces $F\ (a\ b] \to \mathbf{R}$ es continua en $(a,b]$ y diferenciable en todo punto de $(a\ b)$ con $F'(y) = -f(y)$ para todo $y \in (a\ b]$ Luego $G + F$ es continua en $(a\ b]$ y tiene derivada nula en todo punto de (a,b)

En consecuencia $G + F$ es constante en cualquier subintervalo cerrado $[y\ b]$ de $(a\ b]$ y por lo tanto

$$(G + F)(y) = (G + F)(b) \text{ para todo } y \in (a\ b]$$

o sea,

$$F(y) = G(b) - G(y)$$

Pero como G es continua en $(a,b]$, $\lim_{y \to a^+} G(a)$ existe y es igual a

$G(a)$ Luego se sigue que $\lim_{y \to a^+} F(y)$ existe y es igual a

$G(b) - G(a)$, esto es,

$$\lim_{y \to a^+} \int_y^b f dx = (CR) \int_a^b f dx$$

El alcance de la integral de Riemann está limitado a funciones definidas en intervalos acotados Trataremos de definir la integral de funciones definidas en intervalos no acotados

DEFINICIÓN Nº 7

Sea $a \in \mathbf{R}$ y $f \; [a,\infty) \to \mathbf{R}$ Se dice que f es Cauchy-Riemann integrable sobre $[a,\infty)$ y escribimos $f \in CR\,([a,\infty))$ si

$$f/[a,y] \in CR([a,y])$$

para todo $y > a$ ($f/[a,y]$ es la restricción de f al conjunto $[a,y]$), y

$$\lim_{y \to \infty} (CR) \int_a^y f dx \qquad \text{existe}$$

Si se cumplen estas condiciones, el límite indicado es el valor de integral Cauchy-Riemann sobre $[a,\infty)$ y lo representaremos por

$$(CR)\int_a^\infty f dx,$$

o sea,

$$(CR)\int_a^\infty f dx = \lim_{y\to\infty} (CR)\int_a^y f dy$$

Ejemplo Sea $f\ [1,\infty) \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, entonces

$f/[1,y]$ es continua para cada $y > 1$, por lo tanto,

$f/[1,y] \in CR([1,y])$

y

$$(CR)\int_1^y f dx = \int_1^y f dx = 1 - \frac{1}{y}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{y\to\infty} (CR)\int_1^y f dx = 1$$

Luego,

Integral de Riemann y la Integral de Cauchy-Riemann

TEOREMA Nº 5

Si f es continua en [a,b], entonces f es, a la vez, Riemann integrable y Cauchy-Riemann integrable en [a,b] y

$$\int_a^b f dx = (CR) \int_a^b f dx$$

Demostración

Supongamos que f [a,b] → **R** es continua y definamos la función F [a,b] → **R** por

$$F(x) = \int_a^x f dx$$

Entonces F es continua en [a,b] y diferenciable en (a,b) y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a,b)$ Luego, podemos tomar $S = \phi$ Así pues, $f \in CR[a,b]$ y

$$(CR) \int_a^b f dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f dx$$

$$f \in CR[1,\infty) \text{ y } (CR) \int_1^y \frac{dx}{x^2} = 1$$

DEFINICION Nº 8

Sea $a \in \mathbf{R}$ f $(-\infty,a] \to \mathbf{R}$, se dice que f es Cauchy-Riemann integrable sobre $(-\infty,a]$ y escribiremos $f \in CR\ ((-\infty,a])$ si $f/[y,a] \in CR\ ([a,y])$ para todo $y < a$, y

$$\lim_{y\to-\infty} (CR) \int_y^a f dx \quad \text{existe}$$

En este caso escribiremos

$$CR \int_{-\infty}^a f dx = \lim_{y\to-\infty} CR \int_y^a f dx$$

DEFINICION Nº 9

Sea f $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Se dice que f es Cauchy-Riemann integrable sobre $\mathbf{R}$ si $f \in CR\ ((-\infty,0])$ y $f \in CR\ ([0,\infty])$ En este caso escribiremos

$$(CR)\int_{-\infty}^{\infty} f dx = (CR)\int_{-\infty}^{0} f dx + (CR)\int_{0}^{\infty} f dx$$

TEOREMA Nº 7 Sea f $[a\ \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua Entonces $f \in CR([a,\infty))$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un $x_0 \geq a$ tal que

$$\left| \int_{x}^{y} f dx \right| < \epsilon \text{ siempre que } x_0 \leq x < y$$

Demostración

Condición necesaria ($\Rightarrow$) Supongamos que $f \in CR\ ([a\ \infty))$ entonces

$$\lim_{y\to\infty} (CR) \int_{a}^{y} f dx = \lim_{y\to\infty} \int_{a}^{y} f dx = K \quad \text{existe}$$

(Recordemos que $f \in C[a,y] \Leftrightarrow f \in CR[a\ y])$

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $x_0 \geq a$, tal que

$$\left| \int_{a}^{z} f dx - k \right| < \frac{\epsilon}{2} \text{ , para todo } z \geq x_0$$

Sean x y $y \in [a\ \infty)$ tales que $x_0 \leq x < y$, entonces

$$\left| \int_x^y f dx \right| = \left| \int_a^y f dx - \int_a^x f dx \right| \leq \left| \int_a^y f dx - k \right| + \left| \int_a^x f dx - k \right|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Condición suficiente ($\Leftarrow$)

Como f es continua en $[a, y]$ para cada $y \geq a$

$$f/[a,y] \in CR([a,y]$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > a$, definamos el número

$$t_n = \int_a^n f dx$$

Probaremos que $\{t_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ Sea $\epsilon > 0$, entonces por hipótesis existe $x_0 \geq a$, tal que

$$\left| \int_x^y f dx \right| < \epsilon$$

Siempre que $x_0 \leq x < y$ Sea N_0 un numero natural $N_0 \geq x_0$ y sean $n, m \in \mathbf{N}$, con $n, m \geq N_0$, $n < m$, entonces

$$|t_m - t_n| = \left| \int_a^m f dx - \int_a^n f dx \right|$$

$$= \left| \int_n^m f dx \right| < \epsilon$$

puesto que $x_0 \leq n < m$

Así pues, $\{t_n\}$ es una sucesión de Cauchy Por lo tanto, existe $t \in \mathbf{R}$, tal que $t_n \to t$ Probemos que

$$\lim_{y \to \infty} \int_a^y f dx$$

existe y es igual a t

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tal que

$$|t_m - t_n| < \epsilon/2$$

para todo $n,m \in \mathbb{N}$ tal que $m > n \geq n_0$, y además

$$\left| \int_x^y f dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ , para todo } n_0 \leq x < y$$

Ahora bien, para todo $y > n_0$, se tiene que

$$\left| \int_a^y f dx - t \right| \leq \left| \int_a^y f dx - t_{n_0} \right| + \left| t_{n_0} - t \right|$$

$$\leq \left| \int_a^y f dx - \int_a^{n_0} f dx \right| + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\leq \left| \int_{n_0}^y f dx \right| + \frac{\epsilon}{2}$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Así pues,

$$\lim_{y \to \infty} \int_a^y f dx = t,$$

por consiguiente, $f \in CR([a,\infty))$

Existe un resultado similar al del Teorema 7 para una función definida sobre un intervalo del tipo $(-\infty,\infty)$

Para finalizar este capítulo, queremos puntualizar que la integral de Cauchy-Riemann también se puede definir para funciones definidas sobre intervalos que no sean cerrados y lo dejamos como tarea de investigación para las personas interesadas en esta área de la Matemática

CAPITULO III:

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN EL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA INTEGRAL

3.1. FUNDAMENTOS EPISTEMOLOGICOS

La preocupación por el conocimiento erroneo, por las condiciones que lo hacen posible y por la funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de la ciencia y epistemólogos, entre los que se destacan Popper, Bachelard, Russel y Lakatos

Los errores forman parte de las producciones de los alumnos durante su aprendizaje de las matemáticas Los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, constituyen un elemento estable de dichos procesos Por otra parte, siendo un objetivo permanente de la enseñanza de las matemáticas en el sistema escolar, lograr un correcto aprendizaje de las mismas por parte de todos los alumnos, es claro que las producciones o respuestas incorrectas a las situaciones que se plantean se consideran como señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de dicho objetivo

Por ello el estudio de los errores en el aprendizaje de las matemáticas ha sido una cuestión de permanente interés en Educación Matemática, que tiene una larga historia y se ha caracterizado por aproximaciones e intereses muy diferentes

En cada época el análisis de los errores en Educación Matematica se ha visto orientada por las corrientes predominantes en pedagogía y psicología, también ha estado condicionado por los objetivos y formas de organización del currículo de matemática en los correspondientes sistemas educativos

Popper propone reemplazar la pregunta acerca de las fuentes de nuestro conocimiento como pregunta fundamental, por la pregunta totalmente diferente ***¿Cómo podemos detectar y eliminar el error?*** Esto conlleva admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento Las organizaciones insuficientes o claramente deficientes, las hipótesis tentativas, las conceptualizaciones incompletas son parte legítima de nuestro acceso al conocimiento, forman parte de nuestro modo de conocer

La noción del obstáculo epistemológico fue introducido por el epistemólogo y filósofo, **Gaston Bachelard**, en un libro que apareció en 1938 bajo el título ***"La formación del espíritu científico"***

Bachelard planteó la noción de obstáculo epistemológico como una explicación para esa aparición inevitable de errores que hemos visto, constituye parte importante de nuestro avance en el conocimiento Así, el comienzo de su obra glosa las siguientes ideas

- Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos, en el acto mismo de conocer, íntimamente, en donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones, es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta retrocesos, es ahí donde discerniremos causas de inercia, que llamaremos obstáculos epistemológicos

Segun la información revisada, el primer texto de didáctica de la matemática donde aparecen por primera vez la noción de obstáculos epistomológicos, es aquel sobre la conferencia presentada en 1976 por **Gay Brousseau**, en la Conferencia del **CIEAEM** en Suiza, en donde Brousseau deja entrever que la noción de obstáculo es el medio de cambiar el status de error, pues señala

"El error y el fracaso no tiene el cometido simplificado que a veces queremos atribuirles El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, segun se creía en las teorías empiristas o conductista del aprendizaje, es el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo interés, éxito, pero que después se revela falso o simplemente inadaptable Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos"

Un obstaculo se manifiesta por medio de los errores, pero los errores no son debido al azar Ellos son fugaces, erraticos, reproducibles, persistentes No desaparecen radicalmente, se resisten, persisten y hasta después reaparecen, se manifiestan por un período posterior al período en el que el sujeto rechazó el modelo defectuoso de un sistema cognitivo consciente

Es por ello que es necesario un flujo suficiente de situaciones nuevas que lo desestabilicen, lo hagan incapaz, inutil, que lo obligue a retomar o rechazar los conocimientos

De esta manera, para superar un obstáculo se exige un trabajo de la misma naturaleza que el que se exige para la adquisición de un conocimiento, es decir, se necesitan interacciones repetidas, la dialéctica del alumno con el objeto de su conocimiento

3.2. CLASIFICACIÓN DE LOS OBSTÁCULOS

Brousseau distingue cuatro tipos de obstáculos que se diferencian por su origen

3 2 1 **Obstáculo de origen ontogénico** Está ligado a las limitaciones de las capacidades cognitivas del alumno en su proceso de aprendizaje

3 2 2 **Obstáculo de origen didáctico** Está relacionado con el sistema de enseñanza en que se encuentra inmerso el alumno

3 2 3 **Obstáculo de origen epistemológico** Está relacionado al conocimiento mismo

3 2 4 **Obstáculo de origen cultural** Está ligado al contexto cultural

A continuación presentaremos obstáculos detectados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la integral, que de acuerdo con la clasificación dada por Brosseau, son obstáculos de origen didácticos y de origen epistemológicos

3.3. SOBRE LA NO COINCIDENCIA DE LA INTEGRAL DEFINIDA Y DE PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN

En el proceso de la enseñanza de la integral nos encontramos que, tanto los libros de cálculo como los profesores responsables de los cursos de cálculo, señalan que la derivación e integración son procesos inversos, tal como se considero durante todo el siglo XVIII Afirmaciones de esta naturaleza se convierten en obstaculos epistemologicos de origen didactico, desde el momento que el docente no presenta ejemplos que ilustren la no coincidencia de estos conceptos, es decir, ejemplos de una funcion que tiene primitiva y no es integrable, e inversamente, ejemplo de una funcion que es integrable y no tiene primitiva

Es necesario, entonces, que al estudiar el proceso de integracion se aclare bajo que condiciones los procesos de derivacion e integracion son conceptos equivalentes

Para presentar los ejemplos referidos se nos hace necesario revisar el Teorema de Darboux Veamos antes, sin considerar su demostracion, el siguiente lema

LEMA

Sea $I \subseteq \mathbf{R}$ un intervalo, sea $f \quad I \to \mathbf{R}$, sea $c \in I$, y supongase que f tiene una derivada en c Entonces

a Si $f'(c) > 0$, entonces hay un numero de $\delta > 0$ tal que $f(x)>f(c)$ para $x \in I$ tal que $c < x < c + \delta$

b Si $f'(c) < 0$, entonces existe un numero $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(c)$ para $x \in I$ tal que $c - \delta < x < c$

3 3 1 TEOREMA DE DARBOUX

Si f es derivable en $I = [a,b]$ y si k es un numero entre $f'(a)$ y $f'(b)$, entonces hay por lo menos un punto c en (a,b) tal que $f'(c) = k$

Demostración

Supongamos que $f'(a) < k < f'(b)$ y definamos $g \; I \to \mathbf{R}$ por $g(x) = k(x - a) - f(x)$ Puesto que g es continua en I, es claro que g es derivable en I, ella alcanza un valor máximo en I Como $g'(a) = k - f'(a) > 0$, de la parte (a) del lema anterior se infiere que el máximo de g no ocurre en $x = a$ De igual manera, puesto que $g'(b) = k - f'(b) < 0$, por la parte (b) del lema anterior se infiere que el máximo de g no ocurre en $x = b$ Por consiguiente, g alcanza su máximo en algun punto de c de (a,b) Entonces, por el Teorema del Extremo Interior se tiene $0 = g'(c) = k - f'(c)$ Por tanto,

$$f'(c) = k$$

Ahora presentaremos una función que posee primitiva y no es integrable en un intervalo cerrado Para ello, consideraremos la función

$$f \quad [-1,1] \to \mathbf{R}$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,sen\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Probemos que la función F $[-1,1] \to \mathbf{R}$, definida por

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 sen\dfrac{1}{x^2} & , \text{ si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

es una primitiva de f en $[-1,1]$

En efecto, si $x \neq 0$, entonces

$$F'(x) = x\,sen\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

$$= f(x)$$

Si $x = 0$,

$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(0+h) - F(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2} h^2 sen \frac{1}{h^2}}{h} = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} h \, sen \frac{1}{h^2} = 0 = f(0)$$

Así pues $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [-1,1]$, o sea, F es una primitiva de f en [-1,1]

Probemos ahora que f no es integrable en [-1,1] Para ello, probaremos que f no es acotada en [-1,1] En efecto,

sea $$x_n = \frac{1}{\sqrt{(2n - 1)\pi}}$$, luego

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2n - 1)}} = 0$$

y

$$f(\bar{x}_n) = x_n sen \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n} \cos \frac{1}{x_n^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2n - 1)\pi}} sen\,((2n - 1)\pi) - \sqrt{(2n - 1)\pi} \cos((2n - 1)\pi)$$

$$= -\sqrt{(2n-1)\pi}\ (-1)$$

$$= \sqrt{(2n-1)\pi}$$

por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(2n-1)\pi} = \infty$$

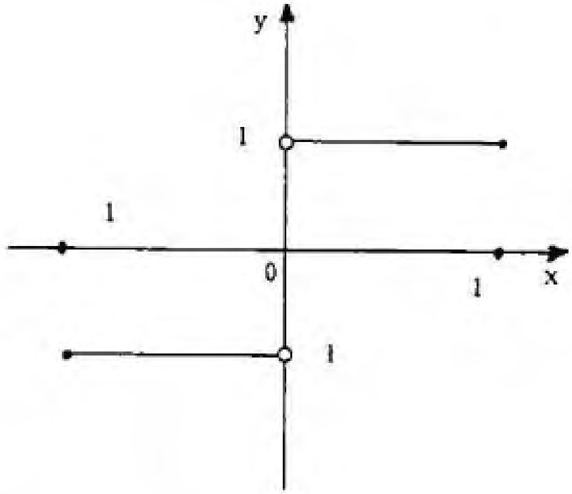
Así pues, f no es acotada en [-1,1] Notemos que en realidad f no es acotada en alguna vecindad del cero Por consiguiente, por la definición de integral de Riemann, f no es integrable en [-1,1]

Observe que más aun f no es integrable en los intervalos del tipo [-a,a] con a > 0

Consideremos ahora la función $g\ [-1,1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de g es la siguiente



La función g es integrable en [-1,1] En efecto, la función g es integrable en [-1,0],

$$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx = -1$$

de igual manera, g es integrable en [0,1],

$$\int_{0}^{1} g(x)\,dx = 1$$

Por lo tanto, g es integrable en [-1,1], además,

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\,dx = -1 + 1 = 0$$

Sin embargo la función g no posee primitiva en [-1,1], puesto que si g tuviera primitiva, existiría una función

$$F: [-1,1] \to \mathbf{R} \text{ tal que}$$

$$F'(x) = g(x), \text{ para todo } x \in [-1,1]$$

Luego, F debe satisfacer el Teorema de Darboüx Pero si tomamos $a = -1/2$, $b = 1/2$ y $k = 3/4$, entonces

$$F'(-1/2) = g(-1/2) = -1$$

$$F'(1/2) = g(1/2) = 1$$

$$-1 < k < 1$$

Pero no existe un

$$c \in (-1/2,1/2) \text{ tal que } F'(c) = g(c) = 3/4$$

Este resultado nos dice que g es integrable, pero que no tiene primitiva en [-1,1]

Los dos ejemplos que hemos presentado nos hablan claramente sobre la no coincidencia de primitiva e integral definida Es tarea del facilitador del curso decirle a sus estudiantes que con cierta condición de continuidad estos dos conceptos son equivalentes

3.4. ENSEÑANDO INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Una de las razones que motivan la necesidad de reformar los estándares curriculares y en particular los programas de cálculo, es evitar los libros de cálculo que vienen en forma parecida a los libros de cocina (presentan el procedimiento para resolver un problema como si fuera receta de cocina)

Así pues, esta reforma debe estar fundamentada en el propósito de enseñar conceptos en lugar de técnicas, comprensión en vez de memorización Esta es una tarea que vale la pena, pero la forma de lograrla no es nada fácil

Atendiendo a esta situación, en la enseñanza del cálculo se presenta un caso que merece especial atención, se trata de la Enseñanza de Integración por Sustitución

Cabe indicar que este método es uno de los más importantes, pero exige mucho más ingenio por parte del estudiante, además que la explicación es más difícil

En la integración por sustitución se le presentan dos situaciones diferentes al estudiante

1 La integración de funciones del tipo

$x\sqrt{1 - x^2}$ ó $\frac{lnx}{x}$, aquí generalmente no hay mayor dificultad porque se observa que estas funciones son del tipo $f(g(x))g'(x)$ y si conocemos una primitiva de f, llamémosla F, entonces la antiderivada que uno está buscando es $F(g(x))$ La gran mayoría de los libros de texto afirman que esto no es más que una aplicación de la regla de la cadena en reversa

Aunque por lo general el estudiante intuitivamente, adquiere este conocimiento que lo ayuda a desarrollar la técnica en forma mecánica, sin mucho entendimiento de lo que realmente está ocurriendo La otra situación es la siguiente

2 El integrando representa funciones del tipo $\sqrt{1 - x^2}$, sin la x extra en la parte de afuera del radical, entonces la sustitución a realizar no parece evidente Sin embargo, los libros de texto nos sugieren hacer $x = \operatorname{sen}\theta$, $dx = \cos\theta \, d\theta$, etc , desapareciendo así la dificultad que se tuvo en un principio y el proceso mecánico vuelve a aparecer, pero sin justificar las operaciones

Si observamos los dos casos mencionados, en el primero se está empleando una sustitución del tipo $u = g(x)$, mientras que en el segundo se sustituye $x = g(\theta)$ Los teoremas que justifican ambas sustituciones se les denomina, respectivamente a) **Teorema de Sustitución Directa** y, b) **Teorema de Sustitución Inversa**

A continuación presentaremos estos dos teoremas, siguiendo la siguiente metodología enunciaremos el teorema tal como se presenta en la mayoría de los libros de texto, luego haremos algunas observaciones al respecto, presentando ejemplos y finalmente proporcionaremos la demostración

3 4 1 TEOREMA DE SUSTITUCIÓN DIRECTA

Si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du \qquad (1)$$

La ecuación (1) no puede ser tomada literalmente, ya que el miembro derecho es distinto al miembro izquierdo Por un lado $\int f(u)\, du$ significa una primitiva de f, mientras que

$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$ significa una primitiva de $(f\circ g)g'(x)$

Lo que se quiere decir en esta igualdad es que si se sustituye $g(x)$ por u después de tomar la antiderivada de f, obtenemos la antiderivada de la función $f(g(x))g'(x)$ La función $f(g(x))g'(x)$ la denotaremos por h Por lo que si conocemos una antiderivada para f y deseamos encontrar una para h, podemos hallarla aplicando el teorema de sustitución directa

Veamos a continuación dos ejemplos para ilustrar esta situación

1 Calcular $\int \sqrt{sen\ x}\cos x\,dx$

Hagamos $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = sen\ x$, luego $g'(x) = \cos x$, de donde

$$h(x) = (f_0 g)\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x) = \sqrt{sen\ x}\cos x$$

Ahora, si hacemos $u = g(x) = sen\ x$, se tiene que $du = \cos x\,dx$, por lo tanto

$$\int\sqrt{sen\ x}\cos x\,dx = \int\sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}sen^{\frac{3}{2}}x + c$$

2 Calcular $\int\frac{1}{x\ lnx}dx$

Haciendo $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \ln x$, podemos ver que

$g'(x) = \frac{1}{x}$, y

$$h(x) = f(g(x))g'(x) = \frac{1}{lnx}\frac{1}{x}$$

Por lo tanto hacemos u = lnx, $du = \frac{1}{x}dx$ y obtenemos que

$$\int\frac{1}{x\ lnx}dx = \int\frac{1}{u}du = \ln|u| + c = \ln|lnx| + c$$

El procedimiento o técnica que generalmente damos a nuestros estudiantes para resolver este tipo de problemas es el siguiente

i) Haga $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ después de esto sólo debe aparecer la letra u y no la x en el integrando

ii) Hállese una primitiva (expresada en términos de u)

iii) Regrésese nuevamente a la variable original del problema, es decir sustitúyase u de nuevo por $g(x)$

Pasemos ahora a la demostración del teorema el cual puede ser dado a nuestros estudiantes, puesto que lo único que se requiere es que éste domine la regla de la cadena

El teorema de la sustitución directa puede ser formulado en los siguientes términos

Teorema

Si $F' = f$ entonces $(F \circ g)' = h$

Demostración

$$
\begin{aligned}
(F \circ g)' &= (F' \circ g)g' \quad \text{por la regla de la cadena} \\
&= (f \circ g)g' \quad \text{puesto que } F' = f \\
&= h
\end{aligned}
$$

3 4 2 TEOREMA DE SUSTITUCIÓN INVERSA

Este es un teorema que la mayoría de los libros de texto no prueban, pero no lo hacen porque no lo formulan Una vez que se formula la prueba se hace más o menos mecánica, y veremos que la misma no sólo es una aplicación de la regla de la cadena, sino que exige otras cositas más

Los libros que enuncian el teorema de sustitución inversa lo hacen en la siguiente forma

$$\text{Si } x = g(t) \text{ entonces } \int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt \qquad (2)$$

Observemos que las ecuaciones (1) y (2) es la misma (falsa) ecuación Sólo las letras para las variables de integración son diferentes Estas ecuaciones se vuelven correctas cuando uno considera las integrales definitivas y hace las sustituciones adecuadas

En este teorema conocemos una antiderivada para h $\left(h(t) = f(g(t))g'(t)\right)$ y queremos encontrar una para f Presentaremos de inmediato dos ejemplos donde se aplica el teorema de sustitución inversa Consideremos primero el caso donde el factor $g'(x)$ no aparece

1 Calcular $\int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx$

Cuando aparece e^x, se sugiere hacer $u = e^x$, $du = e^x dx$
Como $e^x dx$ no aparece, multiplicamos y dividimos por e^x

$$\int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} \frac{1}{e^x} e^x dx = \int \frac{1 + u}{1 - u} \frac{1}{u} du$$

$$= \int \frac{1 + u}{(1 - u) u} du = \int \frac{du}{u} + 2 \int \frac{du}{1 - u} = \ln|u| - 2\ln|1 - u| + c$$

$$= \ln|e^x| - 2\ln|1 - e^x| + c$$

$$= x - 2\ln|1 - e^x| + c$$

Existe otra forma más sencilla de resolver este problema, el cual no exige multiplicar y dividir por e^x

Si hacemos $u = e^x$, $x = \ln u$

$$dx = \frac{1}{u} du$$

$$\int \frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx = \int \frac{1 + u}{1 - u} \frac{1}{u} du = x - 2\ln|1 - e^x| + c$$

La mayoría de los problemas de sustitución resultan más fáciles si se recurre a la técnica de expresar x en función de u y dx en función de du y no lo contrario Pero esta técnica da resultado si y sólo si la función que expresa u en términos de x es inyectiva para todos los valores de que x que se consideren

2 Calcular $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

Hagamos la sustitución $u = \sqrt{e^x + 1}$ Luego, $u^2 = e^x + 1$, entonces $e^x = u^2 - 1$, y, $x = \ln(u^2 - 1)$

$$dx = \frac{1}{u^2 - 1} 2udu$$

$$\int \frac{(u^2 - 1)^2}{u} \frac{1}{u^2 - 1} 2udu = 2\int (u^2 - 1)\, du = \frac{2}{3}u^3 - 2u + c$$

$$= \frac{2}{3}(e^x + 1)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{e^x + 1} + c$$

Pasemos ahora a la formulación y demostración del Teorema de Sustitución Inversa Hacemos notar que para la demostración de este teorema se requiere que el estudiante domine la regla de la cadena y también la derivada de la función inversa, la cual es

$$(g^{-1})' = \frac{1}{g'}$$

El Teorema de Sustitución Inversa puede ser enunciado como sigue

Teorema

Si **H' = h** y q tiene una inversa entonces

$$(HOq^{-1})' = f$$

Demostración

Puesto que **F' = f**, tenemos por la regla de la cadena que

$$(FOg)' = (F'Og)g' = (fOg)g' = h$$

Así **H** y **FOq** tienen la misma derivada y por tanto la diferencia entre ellas es una constante, así,

$$FOq = H + c \qquad (*)$$

Componiendo ambos lados de (*) por el lado derecho con q^{-1} se tiene

$$FOqOq^{-1} = F = (H + c)Oq^{-1}$$
$$= HOq^{-1} + cOq^{-1}$$
$$= HOq^{-1} + c$$

Luego

$$F' = (HOq^{-1} + c^{-1})'$$

es decir,

$$f = (HOq^{-1})'$$

La sustitución inversa es muy importante y debería ser parte de todo curso de cálculo no sólo porque le permite a uno encontrar antiderivadas de raíces cuadradas de polinomios cuadráticos, sino porque es un ejemplo de la técnica de cambio de variables, la cual es muy importante en matemáticas

Para tratar de inducir al entendimiento de este material debe dársele a los estudiantes una práctica intensiva en composición de funciones, un tema que a menudo encuentran difícil

El enfoque que presentamos en la integración por sustitución se fundamenta en la proposición de que los estudiantes aprenden en un curso, no es lo que ellos leen en un texto o escuchan en una conferencia, sino lo que ellos pueden hacer por sí mismos

Asuntos de rutina y problemas de ejercicios definitivamente tienen su lugar, pero si queremos que los estudiantes entiendan por qué trabajan o funcionan estas rutinas entonces nosotros debemos diseñar problemas cuyas soluciones requieran de este entendimiento

Finalmente consideramos de interés presentar un obstáculo epistemológico de origen didáctico, de gran incidencia en los cursos de cálculo e incluso presente en algunos libros de cálculo Se trata precisamente de solicitarle a los estudiantes que evaluen una integral de tipo $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ Para sorpresa, producto tal vez, del aprendizaje mecanicista, el estudiante evalua la integral mediante la sustitución trigonométrica **x = sen θ**, encontrando que

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi$$

Sin embargo no podemos encontrar justificación para esta expresión puesto que la función $f: [-1,1] \to \mathbf{R}$, definida por

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ no está acotada en $[-1,1]$ y la definición de integral de Riemann no se puede aplicar

CONCLUSIONES

- Antes de Cauchy la existencia de una integral nunca fue motivo de preocupación, se determinaba, por supuesto, explícitamente en la mayoría de las aplicaciones que se realizaban Ninguno de sus predecesores apreció la necesidad de una rigurosa teoría de la integral Sólo un hombre con la fecundidad matemática, como la de Agustín Louis Cauchy, fue capaz de proveer una fundamentacion rigurosa de la teoría de la integral

- Para Cauchy la condición de continuidad estaba implícita en la definición de lo que para él era una función Pero, recordemos que Dirichlet planteó el problema de extender el concepto de la integral de Cauchy a funciones que son discontinuas sobre un conjunto infinito de puntos, en un intervalo finito La interrogante formulada por Dirichlet, *¿en qué caso es una función integrable?*, originó lo que hoy conocemos como integral de Riemann, quien resolvió en parte el problema planteado, extendiendo la definición de Cauchy para una más amplia clase de funciones

- La integral de Riemann es un desarrollo natural de las ideas de Cauchy Claro que la teoría de Riemann difiere en dos aspectos básicos de la de Cauchy Primero, Cauchy tomó los valores de f en los puntos extremos del lado izquierdo de cada subintervalo, Riemann tomó cualquier punto arbitrario en sus subintervalos Segundo, y lo mas fundamental, Cauchy asumió explícitamente que la función cuya integral se va a definir es continua, mientras implícitamente asumiendo que es uniformemente continua, Riemann no asumió la continuidad y dió un ejemplo de una función integrable con un numero infinito de discontinuidades en un intervalo arbitrariamente pequeño

- Si los errores son elementos usuales en nuestro camino, hacia el conocimiento verdadero, hemos de concluir que en el proceso usual de construcción de los conocimientos matematicos van a aparecer, de forma sistemática, errores y, por lo tanto, el proceso mencionado de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, correccion y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones

BIBLIOGRAFÍA

1 **ALEKSANDRON, A , KOLMOROV, A , LAURENTIEN, M , y otros** La matemática su contenido, métodos y significado -- Madrid Alianza Editorial, S A , 1981

2 **BARTLE, R y DONALD, S** Introducción al análisis matemático de una variable -- México Editorial Limusa, 1989

3 **BOURBAKI, N** Elementos de historia de las matemáticas -- [S l] Alianza Universidad, 1973

4 **BOYER, C** Historia de la matemática -- Versión española de Mariano Martínez P -- [S l] Alianza Universitaria Texto, 1994

5 **BOYER, C** History of the Calculus and its conceptual development -- New York Dover [reprint], 1959

6 **BROUSSEAU, G** Les obstacles epistemologiques et les problemas en mathématiques -- Recherche en Didactique dis mathematiques, 1983

7 **BRUCKNER, A** Differentiation of real functions -- [S l] American Mathematical Society, 1994

8 CANTORAL, R Procesos del cálculo y su desarrollo conceptual Tesis de Maestría en Matemática Educativa -- México [s n], 1983

9 CAUCHY, L A Curso de análisis -- Colección MATHEMA -- Traducción de Carlos Alvarez -- México [s n], 1994

10 CHARLES, H E The historical development of the calculus -- [S l] Springer-Verlag, 1937

11 COLLETE, J P Historia de las matemáticas -- Tomos I y II -- México Siglo XXi Editores, S A , 1973

12 CORDERO, F Un estudio de la teoría de integración sus definiciones, el concepto de función primitiva y su relevancia en la didáctica -- Cuadernos de Investigación, Nº 13, Año IV, Guadalajara, México, 1990

13 GALE, D Teaching integration by substitution -- The American Mathematical Monthly -- Pags 520-526, 1994

14 **GORDON, R** <u>The integrals of Lebesque, Denjoy, Perron and Henstock</u> -- [S l] American Mathematical Society, 1994

15 **GLUCHOFF, A** <u>Trigonometric series and theories of integration</u> -- Mathematics Magazine, Vol 67 -- Pág 3-19, 1994

16 **GRABINER, J** <u>The origins of Cauchy's rigorous calculus</u> -- Massachussetts The MIT Press, 1981

17 **GRATTAN-GUINESS** <u>Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910</u> -- [S l] Alianza Editorial, 1984

18 **HAWKINS, T** <u>Lebesque's theory of integration</u> -- Chelsea Chelsea Publishing Company, 1970

19 **IACOBACCI, B** <u>Cauchy and the development of mathematical analysis</u> [S l] UMI Dissertation Information Service, 1967

20 **MARCHISOTTO, E , ZAKERI, G** <u>An invitation to integration in finite terms</u> -- The College Mathematics Journal -- Págs 295-308, 1994

21 **MEDEROS, O, GUTIÉRREZ, R** Sobre la no coincidencia de los conceptos de integral indefinida y de primitiva de una función -- Boletín Nº 5, Sociedad Cubana de Matemáticas -- Págs 33-39, 1985

22 **MORRIS, K** El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días -- Tomo I y II -- [S l] Alianza Universidad, 1972

23 **ORTHON, A** Didáctica de las matemáticas cuestiones, teoría y práctica en el aula -- Madrid Ediciones MORATA, 1996

24 **RICO, L** Errores en el aprendizaje de las matemáticas -- [S l] Editorial Iberoamericana, 1995

25 **RUIZ, H L** Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función Análisis epistemológico y didáctico -- Tesis Doctoral -- Granada, España [s n], 1993

26 **SHENITZER, A** The evolution of the integration -- The American Mathematical Monthly -- Págs 66-72, 1994